Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

PREDIKSI NILAI EKSPOR MIGAS DI INDONESIA MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV (STUDI KASUS NILAI EKSPOR MIGAS INDONESIA PERIODE 1997-2021)

Harnawati[1)], Wayan Somayasa[1,*)] dan Alfian[1)]

[1)] *Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, 93232, Indonesia*
E-mail korespondensi: * wayan.somayasa@uho.ac.id

ABSTRAK

Sejarah Artikel:
Diterima: 12-11-2024
Direvisi: 12-12-2024
Diterima untuk dipublikasikan: 15-12-2024

Kata Kunci:
ekspor migas, rantai Markov, steady state, proses stokastik, ruang keadaan

Ekspor merupakan elemen penting dalam perdagangan internasional, dengan pengaruh signifikan terhadap perkembangan ekonomi suatu negara. Dalam konteks ekspor migas di Indonesia, data menunjukkan sifat stokastik yang fluktuatif dan dipengaruhi oleh berbagai faktor eksternal seperti harga minyak global, permintaan internasional, dan kondisi geopolitik. Oleh karena itu, analisis rantai Markov digunakan untuk memprediksi pergerakan ekspor migas. Pengkategorian keadaan ekspor migas di Indonesia yaitu keadaan 1 (naik drastis) dengan interval $165{,}64762 \leq x \leq 759{,}00000$, keadaan 2 (naik) dengan interval $0{,}00000 \leq x < 165{,}64762$, keadaan 3 (turun) dengan interval $-161{,}21711 \leq x < 0{,}00000$, dan keadaan 4 (turun drastis) dengan interval $-903{,}40000 \leq x < -161{,}21711$. Proses Markov ini menunjukkan bahwa ekspor migas Indonesia diprediksi mencapai keadaan *steady state* pada periode ke-10, dengan kemungkinan 17,11% untuk mengalami kenaikan drastis, 32,21% untuk kenaikan normal, 32,89% untuk penurunan normal, dan 17,79% untuk penurunan drastis. Prediksi ini mengindikasikan bahwa pada tahun-tahun mendatang, nilai ekspor migas di Indonesia cenderung mengalami fluktuasi signifikan, baik dalam bentuk kenaikan maupun penurunan, dengan distribusi probabilitas yang telah diidentifikasi.

Journal homepage: *https://jurnal.ichisultra.or.id/index.php/bakticendekia/index*
Journal e-mail: *jurnal.bakticendikia@gmail.com; wayan.somayasa@uho.ac.id*
Research Article · Open Access

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

1. PENDAHULUAN

Ekspor adalah penjualan barang ke luar negeri dengan menggunakan sistem pembayaran, kualitas, kuantitas dan syarat penjualan lainnya yang telah disetujui oleh pihak eksportir dan importir. Ekspor adalah bagian penting dari perdagangan internasonal. Pengaruh ekspor terhadap perdagangan internasional dan perkembangan ekonomi sebuah negara sangat besar (Nopirin, 2011).

Nilai ekspor Indonesia pada tahun 2021 memecahkan capaian rekor nilai ekspor tertinggi dalam sejarah senilai US$ 231,61 miliar. Nilai ini naik sebesar 41,92% dibanding tahun sebelumnya. Pertumbuhan tersebut disumbang oleh meningkatnya ekspor migas maupun ekspor nonmigas yang masing-masing naik sebesar 48,43% dan 41,58% (Badan Pusat Statistik, 2024).

Nilai ekspor migas merupakan data yang sifatnya acak (*random*) sehingga tidak dapat ditentukan dengan pasti nilainya pada suatu waktu, artinya nilainya berfluktuasi dan dipengaruhi oleh berbagai faktor yang tidak dapat diprediksi dengan pasti, seperti harga minyak global, permintaan internasional, dan kondisi geopolitik, selain itu nilai ekspor migas pada suatu periode dapat dipengaruhi oleh keadaan ekonomi, produksi, dan harga minyak pada periode tersebut, yang kemudian menentukan keadaan di periode berikutnya. Keadaan tersebut memungkinkan data ekspor migas dapat dianalisis menggunakan proses stokastik, yaitu rantai Markov, dimana diasumsikan bahwa banyaknya ketersediaan ekspor migas periode ke-n dengan syarat kejadian ke-$(n-1)$ terjadi adalah konstant, tetapi tidak bergantung pada kejadian ke-$(n-2)$ atau sampai ke-$(n-t)$. Sehingga kejadian ekspor migas merupakan suatu proses stokastik yang mengikuti kejadian rantai Markov. Setelah dianalisis menggunakan rantai Markov dan didapatkan hasil prediksi serta telah mencapai kondisi *steady state*, dapat dilihat bagaimana prediksi keadaan ekspor migas di Indonesia sehingga dapat direkomendasikan kebijakan yang tepat untuk permasalahan ekspor migas tersebut.

Makalah ini disusun mengikuti urutan berikut. Pada Bab 2 disajikan kajian pustaka yang merangkum konsep-konsep yang dibutuhkan dalam pemecahan masalah. Pada Bab 3 dipaparkan hasil dan pembahasan, khsusunya tentang pemodelan fenomena perubahan nilai ekspor migas emnggunakan rantai Markov. Kesimpulan dari makalah ini disajikan pada Bab 4 sebagai penutup.

2. KAJIAN PUSTAKA

Proses stokastik adalah suatu himpunan variabel acak $\{X(t)|t \in T\}$, dimana himpunan T disebut ruang parameter (ruang indeks) dari proses stokastik X. Himpunan indeks bisa berupa himpuan kontinu maupun diskrit. Jika T adalah waktu maka $X(t)$ adalah variabel acak pada saat t (Ross, 1986). Misalnya $X(t)$ menyatakan kecepatan suatu benda yang bergerak pada garis lurus pada saat $t, t \in [0, 20]$ detik, maka $X(5)$ adalah kecepatan sesaat setelah bergerak selama 5 sekon. Selanjutnya selang $[0, 20]$ detik disebut ruang keadaan. $\{X(t)|t \in T\}$ adalah proses dengan waktu diskrit, jika T bersifat terhitung (*countable*) begitupun untuk waktu kontinu, sehingga dapat dikatakan bahwa *keadaan space* dapat berupa himpunan diskrit maupun himpunan kontinu.

Rantai Markov ditemukan oleh seorang ilmuwan Rusia yang bernama Andrey Andreyevich Markov pada tahun 1906. Andrey Andreyevich Markov (1856-1922) adalah ilmuwan pertama yang mempublikasikan hasil tentang rantai Markov, oleh karena itu temuan ini diberi nama rantai Markov sesuai dengan nama penemunya dan merupakan penghargaan atas jasanya di bidang ilmu stokastik (Ching dan Ng 2006). *Markov chain* berkaitan dengan rangkaian variabel acak, yang sesuai dengan keadaan suatu sistem

Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

tertentu, sedemikian rupa sehingga probabilitas keadaan pada suatu waktu hanya bergantung pada keadaan pada waktu sebelumnya.

Pandang suatu proses stokastik dengan waktu kontinu $\{X(t), t \in [0,\infty), t \in \mathbb{R}\}$ dengan ruang keadaan diskrit S. Proses tersebut dikatakan suatu rantai Markov waktu kontinu jika setiap $s, t \geq 0$ dan untuk setiap $i, j, x(u) \in S$, dimana $0 \leq u \leq s$ didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} P\{X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x(u), 0 \leq u \leq s\} \\ = P\{X_{s+t} = j | X_s = i\} \; \forall \; s, t \; \geq 0 \\ = P_{ij}(t) \end{aligned}$$

yang berarti, peluang keadaan di waktu mendatang $t + s$ hanya bergantung pada keadaan saat ini s dan tidak bergantung pada keadaan pada waktu lampau (Ross, 1986).

Definisi 2.2.1 (Yin dan Zhang, 2005) Misalkan terdapat probabilitas tetap P_{ij} yang tidak bergantung pada waktu seperti berikut

$$P(X_{n+1} = j |\; X_n = i) = P_{ij},$$

dimana $i, j \in M,$ maka ini disebut proses rantai Markov dengan waktu diskrit.

Definisi 2.2.2 (**Ching dan Ng, 2006)** Matriks yang berisi P_{ij}, disebut matriks probabilitas transisi

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Matriks $\boldsymbol{P}$ disebut matriks probabilitas transisi satu langkah dari proses tersebut.

Definisi 2.2.3 (Cassandras dan Lafortune, 2021) Misalkan $X = \{X_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ merupakan rantai Markov dengan ruang keadaan $M = \{0,1,2,3,\ldots\}$, peluang transisi n langkah dari keadaan i ke keadaan j adalah

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P\left\{X_{(m+n)} = j \middle| X_{(m)} = i\right\} \; m \geq 0, i, j \geq 0 \\ P_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= P\{X_{n+1} = j | X_1 = i\} \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

selanjutnya akan dihitung peluang transisi n langkah $\boldsymbol{P}^n$ dengan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^{(n)} &= \boldsymbol{P}^{(1)} \cdot \; \boldsymbol{P}^{(n-1)} \\ &= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-1)} \\ &= \boldsymbol{P}^{(2)} \cdot \; \boldsymbol{P}^{(n-2)} \\ &\;\;\vdots \\ &= \boldsymbol{P}^{(r)} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-r)}, \end{aligned}$$

artinya, matriks peluang transisi n langkah diperoleh dari matriks $\boldsymbol{P}$ dipangkatkan n. sehingga, diperoleh $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(r)} \cdot \; \boldsymbol{P}^{(n-r)}, r = 1,2,3, \ldots.$

Proposisi 2.2.4 (Ching dan Ng, 2006) Misalkan $X = \{X_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ merupakan rantai Markov dengan ruang keadaan $M = \{0,1,2,3,\ldots\}$, maka berlaku

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}, \;\; n,m > 0 \; \forall i,j.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2.4 jika dimisalkan $\boldsymbol{P}^{(n)}$ adalah matriks probabilitas transisi n-langkah dan $\boldsymbol{P}$ adalah matriks transisi satu langkah, maka $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{n}$.

Definisi 2.2.5 (Ching dan Ng, 2006) Suatu keadaan j dapat dicapai (*accessible*) dari keadaan i (ditulis $i \rightarrow j$) jika terdapat $n \geq 0$ sedemikian sehingga $P_{ij}^{(n)} > 0$, di mana $P_{ij}^{(n)}$ adalah peluang transisi n langkah. Sebaliknya, keadaan j dikatakan tidak dapat dicapai dari keadaan i, jika $P_{ij}^{(n)} = 0, \forall\, n \geq 0$.

Definisi 2.2.6 (Ching dan Ng, 2006) Jika keadaan j dapat dicapai dari keadaan i dan sebaliknya, keadaan i dapat dicapai dari keadaan j, maka i dan j dikatakan berkomunikasi (*communicate*) $(i \leftrightarrow j)$.

Definisi 2.2.7 (**Karlin & Taylor, 1975)** Dua keadaan yang saling berkomunikasi akan berada dalam satu kelas. Rantai Markov dikatakan *irreducible* (dapat terurai) jika semua keadaan berada pada kelas yang sama, yaitu setiap keadaan berkomunikasi satu sama lain.

Definisi 2.2.8 (Karlin dan Taylor, 1975) Suatu keadaan dikatakan *recurrent* jika memasuki keadaan tertentu maka proses pasti akan kembali ke keadaan itu lagi. Sedangkan suatu keadaan dikatakan *transient* jika memasuki keadaan tertentu proses tidak akan pernah kembali ke keadaan itu lagi.

Definisi 2.2.9 (Norris, 1997) (Peluang waktu kejadian pertama)

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_r \neq j, r = 1,2,\dots,n-1 | X_0 = i\}.$$

Peluang waktu kejadian pertama adalah peluang di mana keadaan j dicapai dari keadaan i pertama kali setelah n langkah.

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} + \cdots$$

dengan $f_{ij} \neq f_{ij}^{(1)}$.

Proposisi 2.2.10 (Karlin dan Taylor, 1975) (i) Keadaan i *recurrent* jika dan hanya jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{n} = \infty.$$

(ii) Keadaan i *transient* jika dan hanya jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{n} < \infty.$$

Teorema 2.2.11 (Karlin dan Taylor, 1975) Jika keadaan i *recurrent* dan $i \leftrightarrow j$ maka keadaan j juga *recurrent*.

Akibatnya dapat dikatakan bahwa suatu rantai Markov bersifat *irreducible* jika memiliki keadaan yang reccurent atau *transient*.

Teorema 2.2.12 (Ching dan Ng (2006)) Dari suatu rantai Markov, semua keadaan dapat diklasifikasikan menjadi beberapa kelas *recurrent* yaitu C_1, C_2, ... dan sisanya merupakan keadaan *transient*.

Definisi 2.2.13 (Ching dan Ng, 2006) Keadaan i dikatakan *absorbing* atau menyerap jika $P_{ii}^{(n)} = 1$. Suatu rantai Markov dikatakan menyerap (*absorbing Markov chain*) jika paling sedikit terdapat satu keadaan menyerap.

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

Definisi 2.2.14 (Ching dan Ng, 2006) Periode suatu keadaan i dinotasikan dengan $d(i)$, atau dengan kata lain keadaan i dikatakan periodik (memiliki periode) $d(i)$ jika $d(i)$ merupakan FPB (faktor Persekutuan terbesar) dari seluruh $n = 1,2, \dots$ dimana $P_{ii}^{(n)} > 0$.

$$d(i) = FPB\left\{n \geq 1 \middle| P_{ii}^{(n)} > 0\right\}.$$

Jika $d(i) = 1$, maka keadaan i disebut aperiodik.
Jika $d(i) > 1$, maka keadaan i disebut periodik.
Teorema 2.2.15 (Ching dan Ng, 2006) Jika $i \leftrightarrow j$ maka $d(i) = d(j)$.
Definisi 2.2.16 (Karlin dan Taylor, 1975) (Klasifikasi keadaan *recurrent*) untuk suatu rantai Markov, semua keadaan *recurrent* diklasifikasikan menjadi keadaan positif *recurrent* atau *null-recurrent*, yaitu

1. Keadaan *recurrent* dikatakan positif *recurrent* dengan memperhatikan
$$\mu_j < \infty.$$
2. Keadaan *recurrent* dikatakan *null recurrent* dengan memperhatikan
$$\mu_j = \infty,$$
dimana
$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n. f_{jj}^{(n)},$$

menyatakan rata-rata waktu *recurrent* (*mean reccurent time*) untuk keadaan j.
Teorema 2.2.17 (Karlin dan Taylor, 1975) (i) Jika keadaan j *recurrent* dan aperiodik, maka

$$P_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}, untuk\ n \to \infty.$$

(ii) Jika keadaan j *recurrent* dan periodic dengan periode $d(j)$, maka

$$P_{jj}^{(n)} \to \frac{d(j)}{\mu_j}, untuk\ n \to \infty$$

diinterpretasikan bahwa $\frac{1}{\mu_j} = 0$, jika $\mu_j = \infty$ (artinya keadaan j *null recurrent*).
Teorema 2.2.18 (Karlin dan Taylor, 1975) Jika keadaan j *recurrent* dan aperiodik, maka

$$P_{jj}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}, untuk\ n \to \infty,$$

dalam hal ini diasumsikan bahwa

$$\frac{1}{\mu_j} = 0, jika\ \mu_j = \infty.$$

Selanjutnya akan diturunkan limit peluang untuk rantai Markov *irreducible* yang positif *recurrent* dan aperiodik (dinamakan rantai Markov ergodik).
Definisi 2.2.19 (Karlin dan Taylor, 1975) Misalkan **P** matriks peluang transisi (m *keadaan*) dari rantai Markov homogen. Jika $\exists\pi \ni \pi = \pi\boldsymbol{P}$ dan $\sum_{j=0}^{m} \pi_j = 1$, maka $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m]$ disebut distribusi stastioner untuk rantai Markov homogen.
Teorema 2.2.20 (Karlin dan Taylor, 1975) Jika suatu rantai Markov *irreducible*, positif *recurrent*, dan aperiodik (rantai Markov ergodik) maka terdapat limit peluang

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

dan tidak bergantung pada i.

Proposisi 2.2.21 Jika $X = \{X_n: n = 0,1,2,\ldots\}$ merupakan rantai Markov dengan ruang keadaan $M = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Misalkan $\pi_i = P\{X_n = i\}$, maka $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $X = \{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses stokastik. $X(t)$ merupakan peubah acak yang kemudian menyatakan nilai ekspor migas pada saat t. Himpunan kejadian $X(t)$ yang mungkin terjadi disebut ruang keadaan dari model X. Dalam penyusunan prediksi jangka Panjang untuk ekspor migas di Indonesia dengan menggunakan metode rantai Markov. Pada penyusunan tersebut menggunakan data nilai ekspor migas di Indonesia dari tahun 1997-2021 dengan format data bulanan. Rantai *Markov* dapat dianalisis jika mempunyai *state* bersifat ergodik yaitu jika memenuhi 3 syarat *recurrent*, *aperiodic* dan *communicate*.

Klasifikasi *state* didasarkan pada persyaratan terpenuhi atau tidaknya dalam persyaratan *Markov Chain* yang ergodik. Sebuah *state* dibentuk oleh *Trial and error*, dan *state* akhirnya ditemukan. Analis *absorbing chain* mensyaratkan bahwa sebuah *state* tidak perlu meninjau keadaan di masa mendatang. Model *absorbing chain* tidak dapat digunakan untuk menganalisis data. Untuk mengatasi masalah tersebut dapat digunakan suatu metode pendekatan dimana beberapa keadaan dapat ditentukan dengan menganalisis perubahan selisih tiap nilai pada suatu data (Safitri dan Astuti, 2021).

Model nilai ekspor migas ini akan terdiri dari 4 keadaan yang mewakili perubahan nilai ekspor migas di Indonesia, yaitu keadaan naik drastis (1), naik (2), turun (3) dan turun drastis (4). Keempat keadaan ini diperoleh dari transisi data perbulan yang diklasifikasikan menjadi naik drastis (1), naik (2), turun (3), dan turun drastis (4). Pada Lampiran 1 telah disajikan data nilai ekspor migas dari tahun 1997-2021. klasifikasi perubahan nilai ekspor migas setiap bulannya disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Klasifikasi Perubahan Nilai Ekspor Setiap Bulan

Kenaikan Tertinggi	$759{,}00000$
Penurunan Tertinggi	$-903{,}40000$
Rata- rata Naik	$165{,}64762$
Rata- rata Turun	$-161{,}21711$

Tabel 4.2 Klasifikasi keadaan Nilai Ekspor Migas

Keadaan 1	Naik drastis dengan range $165{,}64762 \leq x \leq 759{,}00000$
Keadaan 2	Naik dengan range $0{,}00000 \leq x < 165{,}64762$
Keadaan 3	Turun dengan range $-161{,}21711 \leq x < 0{,}00000$
Keadaan 4	Turun drastis dengan range $-903{,}40000 \leq x \leq -161{,}21711$

karena klasifikasi keadaannya terdiri atas keadaan 1, 2, 3, dan 4, maka untuk transisi keadaannya adalah, $11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44$.

$X = \{X_t: t = 0,1,2,\ldots 300\}$ merupakan nilai ekspor migas pada saat t dengan ruang keadaan $M = \{1,2,3,4\}$, dengan keadaan 1 adalah keadaan saat ekspor migas mengalami kenaikan drastis, keadaan 2 adalah keadaan saat ekspor migas mengalami kenaikan normal, keadaan 3 adalah keadaan saat ekspor migas mengalami penurunan normal dan keadaan 4 adalah keadaan saat ekspor migas mengalami penurunan

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

drastis. P_{ij} adalah probabilitas perpindahan dari keadaan i ke keadaan j, dimana $i, j = 1,2,3,4$, P_{11} yaitu probabilitas keadaan berpindah dari keadaan 1 (keadaan saat ekspor migas mengalami kenaikan drastis) ke keadaan 2 (keadaan saat ekspor migas mengalami kenaikan normal), dan seterusnya hingga P_{44} yaitu probabilitas keadaan berpindah dari keadaan 4 (keadaan saat ekspor migas mengalami penurunan drastis) ke keadaan itu sendiri.

P_{ij} dapat diestimasi dengan hasil bagi antara jumlah individu yang mengalami perpindahan dari keadaan i ke keadaan j untuk seluruh pengamatan dengan jumlah individu keadaan i. Matriks peluang transisi pada umumnya tidak diketahui dan harus diduga melalui pengamatan. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menduga nilai matriks peluang transisi, antara lain penduga maximum likelihood, metode bootstrap, dan perkalian Lagrange (Macmunah, 2020).

a. Metode Likelihood Maksimum

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan sampel acak, maka pdf bersama dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(P) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = x_2|X_1 = 1) \dots P(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P(X_1 = 1)\prod_{t=2}^{n} P\{X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}\} \\ &= 1 \prod_{t=2}^{n} P_{x_{t-1}x_t}, asumsi\ P(X_1 = 1) = 1 \\ &= \prod_{i=2}^{k}\prod_{j=2}^{k} P_{ij}^{n_{ij}}\ , dengan\ i, j\ \in \{1,2, \dots, k\} \end{aligned}$$

dimana n_{ij} adalah banyaknya transisi dari keadaan i ke keadaan j, dan k adalah banyaknya keadaan. Didefinisikan fungsi likelihood

$$L(P) = \ln f(P) = \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=2}^{k} n_{ij} \ln p_{ij}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1\ , i = 1,2, \dots, k.$$

Maksimumkan fungsi likelihood dengan metode pengali lagrange. Misalkan pengali lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ maka fungsi objektif yang baru adalah

$$\begin{aligned} g(P, \lambda) &= L(P) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{k} P_{ij} - 1\right) \\ &= \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=2}^{k} n_{ij} \ln P_{ij} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{k} P_{ij} - 1\right) \end{aligned}$$

Titik maksimum fungsi g ditentukan dari persamaan berikut

$$\frac{\partial g(P, \lambda)}{\partial P_{ij}} = \frac{n_{ij}}{P_{ij}} + \lambda_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_{ij}}{P_{ij}} + \lambda_i = 0$$

Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$\Leftrightarrow \hat{P}_{ij} = -\frac{n_{ij}}{\lambda_i}$$

substitusi $\hat{P}_{ij}$ ke dalam Batasan $\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1\,, i = 1,2,\ldots,k$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \hat{P}_{ij} = \sum_{j=1}^{k} -\frac{n_{ij}}{\lambda_i} = 1,\ i = 1,2,\ldots,k$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i = -\sum_{j=1}^{k} n_{ij}\ , i = 1,2,\ldots,k$$

kemudian substitusi diperoleh λ_i ke dalam $\hat{P}_{ij}$

$$\hat{P}_{ij} = \frac{-n_{ij}}{-\sum_{j=1}^{k} n_{ij}} = \frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{k} n_{ij}}.$$

diamana n_{ij} adalah banyaknya transisi dari keadaan i ke j pada periode (t).

b. Metode Bootstrap

Diberikan data nilai ekspor migas sebanyak 300 data yang kemudian dibagi kedalam 4 keadaan untuk menentukan matriks peluang transisinya. Misalkan $x = x_1, x_2\,, x_3\ \ldots, x_{300}$ adalah data pengamatan tersebut, maka selanjutnya dengan data tersebut akan dijadikan sebagai sampel bootstrap yang akan dilakukan resampling sebanyak $B = 1000$ untuk diketahui standar errornya. Misalkan $x^{*1}\,, x^{*2}\,, \ldots, x*^{B}$ adalah replikasi bootstrap, yaitu

$$\begin{aligned} x^{*1} &= x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{300}^* \\ x^{*2} &= x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{300}^* \\ &\vdots \\ x^{*1000} &= x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{300}^* \end{aligned}$$

dimana sampling dengan pengembalian adalah sebanyak 1000 kali dari data pengamatan $x_1, x_2\,, \ldots, x_{300}$. Selanjutanya diketahui bahwa estimasi peluang tansisi dari data x adalah

$$P_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{k} n_{ij}}.$$

Maka p_{ij}^* adalah estimasi peluang transisi pada sampel Bootstrap

$$P_{ij}^* = \frac{n_{ij}^*}{\sum_{j=1}^{k} n_{ij}^*}.$$

Sehingga

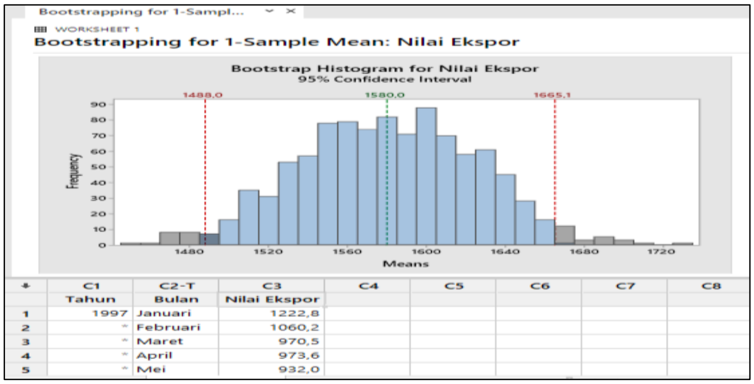
$$\widehat{se}_{boot} = \left\{\frac{\sum_{b=1}^{B}\left(P_{ij}^* - \widehat{P_{ij}}\right)^2}{(B-1)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

dimana

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\sum_{b=1}^{B} P_{ij}^*}{B}.$$

Diketahui data nilai ekspor migas di Indonesia dari tahun 1997-2021, dengan data tersebut akan dilakukan resampling bootstrap sebanyak 1000 kali dengan, menggunakan bantuan aplikasi minitab. Berikut adalah hasil yang diperoleh

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx



Gambar 4.1 Hasil Resampling Bootstrap untuk Nilai Ekspor Migas

Dapat dilihat berdasarkan hasil resampling diatas, perubahan hasil mean sampel bootstrap dapat dilihat pada histogram yang ditampilkan. Berdasarkan histogram tersebut dapat disimpulkan bahwa rataan dari estimasi peluang transisi data pada sampel bootstrap yang diberikan berdistribusi normal. Selanjutnya dapat digunakan metode likelihood maksimum untuk memperoleh estimasi peluang transisi dari matriks trnasisi rantai Markov.

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah realisasi dari sampel acak $X_1,\ X_2, \dots, X_n$ yang berdistribusi normal.

$$f(P_{ij}) = P(X_1 = 1)P(X_2 = x_2|X_1 = 1) \dots P(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1})$$

$$= P(X_1 = 1) \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}) - P_{ij}\right)^2\right\}$$

$$= 1 \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}) - P_{ij}\right)^2\right\}$$

$$= \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}) - P_{ij}\right)^2\right\}$$

$$L(P_{ij}) = -\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}) - P_{ij}\right)^2\right\}$$

$$\ln L(P_{ij}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left((X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}) - P_{ij}\right)^2$$

$$\frac{\partial lnL(P_{ij})}{\partial P_{ij}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\ 2\sum_{i=2}^{n}\left((X_t = x_t|x_{t-1}) - P_{ij}\right)\ (-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\left((X_t = x_t|x_{t-1}) - P_{ij}\right)\ = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n}\left((X_t = x_t|x_{t-1}) - nP_{ij}\right)\ = 0$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxxx

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n}(X_t = x_t | x_{t-1}) = n\ P_{ij}$$

$$\Leftrightarrow P_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_t = x_t | x_{t-1}),$$

dengan n_{ij} adalah banyaknya individu yang mengalami perpindahan dari keadaan i ke keadaan j selama periode t, sehingga persamaan diatas serupa dengan

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} n_{ij}}{n_i}.$$

Berikut disajikan tabel jumlah transisi yang terjadi

Tabel 4.3 Jumlah Transisi Keadaan

Tabel Jumlah Transisi					
Keadaan	1	2	3	4	Jumlah
1	4	10	15	22	51
2	15	29	36	16	96
3	16	44	30	8	98
4	16	13	17	7	53

Penyusunan matriks peluang tansisi dapat dilakukan berdasarkan Tabel 4.3 kemudian dengan metode likelihood maksimum dan metode bootstrap maka akan diperoleh setiap entri-entri matriks diperoleh dengan persamaan

$$P_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} n_{ij}(t)}{\sum_{i=1}^{T} n_i(t)},$$

matriks yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{4}{51} & \frac{10}{51} & \frac{15}{51} & \frac{22}{51} \\ \frac{5}{32} & \frac{29}{96} & \frac{3}{8} & \frac{1}{6} \\ \frac{8}{49} & \frac{22}{49} & \frac{15}{49} & \frac{4}{49} \\ \frac{16}{53} & \frac{13}{53} & \frac{17}{53} & \frac{7}{53} \end{bmatrix}.$$

Dengan menganalisis klasifikasi state rantai Markov tersebut, diperoleh hasil bahwa rantai Markov bersifat ergodik yaitu *recurrent*, aperiodik dan *communicate*. Jadi, kita dapat melanjutkan menganalisis keadaan *steady state* pada rantai Markov dengan menggunakan bantuan Maple didapatkan keadaan *steady state* untuk setiap keadaan nilai ekspor migas di Indonesia adalah

$$\boldsymbol{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.17363 & 0.32200 & 0.32890 & 0.17547 \\ 0.17128 & 0.32232 & 0.32889 & 0.17751 \\ 0.17039 & 0.32229 & 0.32894 & 0.17838 \\ 0.16988 & 0.32172 & 0.32861 & 0.17979 \end{bmatrix}$$

Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$\boldsymbol{P}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \\ 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \\ 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \\ 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \\ 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \\ 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \\ 0.17114 & 0.32215 & 0.32886 & 0.17785 \end{bmatrix}.$$

Hasil perkalian matriks tersebut menunjukkan kekonvergenan peluang keadaan (mencapai *steady state*) n dimulai dari $n = 10$ sampai tak hingga menunjukkan nilai yang sama untuk setiap i. Jadi peluang bebas dari keadaan ii, maka itulah distribusi stationernya,

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = 0{,}17114 = \pi_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} P_{22}^{(n)} = 0{,}32215 = \pi_2,$$
$$\lim_{n\to\infty} P_{33}^{(n)} = 0{,}32886 = \pi_3,$$
$$\lim_{n\to\infty} P_{44}^{(n)} = 0{,}17785 = \pi_4,$$

diperoleh distribusi stasionernya sebagai berikut
$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4] = [0{,}17114 \quad 0{,}32215 \quad 0{,}32886 \quad 0{,}177850]$.

Artinya dalam jangka panjang peluang ekspor migas mengalami kenaikan drastis sebesar 17,114%, peluang ekspor migas mengalami kenaikan sebesar 32,215%, peluang ekspor migas mengalami penurunan sebesar 32,886% dan peluang ekspor migas mengalami penurunan drastis sebesar 17,785%.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil analisis rantai Markov dalam pengkategorian *state* ekspor dan impor nonmigas di Indonesia, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Diperoleh pengkategorian state ekspor migas di Indonesia yaitu State 1 (naik drastis) dengan interval $165{,}64762 \leq x \leq 759{,}00000$, State 2 (naik) dengan interval $0{,}000000 \leq x < 165{,}64762$, State 3 (turun) dengan interval $-161.21711 \leq x < 0{,}00000$, dan State 4 (turun drastis) dengan interval $-903{,}400000\, x < -161{,}21711$.
2. Matriks $\boldsymbol{P}$ ini disebut sebagai matriks estimasi probabilitas transisi dari keadaan i ke keadaan j (P_{ij}), dengan menggunakan metode likelihood maksimum dan metode bootstrap diperoleh persamaan estimasi peluang transisi nya yaitu

$$P_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} n_{ij}(t)}{\sum_{i=1}^{T} n_i(t)},$$

dengan persamaan tersebut diperoleh estimasi peluang transisi untuk model rantai Markov permasalahan ekspor migas di Indonesia yaitu

Volume 1 Nomor 2, Hal. 133 - 144, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{4}{51} & \frac{10}{51} & \frac{15}{51} & \frac{22}{51} \\ \frac{5}{32} & \frac{29}{96} & \frac{3}{8} & \frac{1}{6} \\ \frac{8}{49} & \frac{22}{49} & \frac{15}{49} & \frac{4}{49} \\ \frac{16}{53} & \frac{13}{53} & \frac{17}{53} & \frac{7}{53} \end{bmatrix}$$

3. Proses Markov untuk ekspor migas di Indonesia diprediksi mengalami *steady state* di periode ke-10 dengan prediksi nilai ekspor migas berada pada kategori naik drastis yakni 17,114%, berada pada kategori naik yakni 32,2151%, berada pada kategori turun yakni 32,886%, dan berada pada kategori turun drastis yakni 17,785%. Hal ini memberikan arti bahwa untuk tahun berikutnya dapat diprediksi bahwa nilai ekspor migas di Indonesia akan mengalami kenaikan dan penurunan secara drastis disekitar 17%, serta dmengalami kenaikan dan penurunan normal disekitar angka 32%.

Bagi penelitian selanjutnya agar dapat menggunakan metode lain untuk mengkategorikan data dan memanfaatkan rantai Markov waktu kontinu. Bagi pemerintah agar dapat menjadikan bahan pertimbangan untuk menjaga stabilitas ekspor migas di Indonesia.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada dosen pembimbing atas segala curahan perhatiannya sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Aidi, M.N., 2008, *Penggunaan Rantai Markov Untuk Analisis Spasial Serta Modifikasinya Dari Sistem Tertutup Ke Sistem Terbuka*, Forum Statistika dan Komputasi, 13(1), 23-33.
[2] Bank Indonesia, 2023, Publikasi Laporan Perekonomian Indonesia Tahun 2022, https://www.bi.go.id/id/publikasi/laporan/Pages/LPI_2022.aspx, 3 juni 2024.
[3] Badan Pusat Statistik, 2023, Nilai Ekspor Migas-Nonmigas, https://www.bps.go.id/id/statistics-table/2/MTc1MyMy/nilai-ekspor-migas-nonmigas.html, 3 Juni 2024.
[4] Ching, W.K. dan Ng, M.K., 2006, *Markov Chains : Models , Algorithms and Applications*, Springer Science and Business Media, Inc, Hongkong.
[5] Cassandras, C. G., dan Lafortune, S., 2021, *Introduction to Discrete Event Systems*, Third Edition, Springer Nature Switzerland AG, Switzerland.
[6] Efron,B., and Tibshirani, R.J., 1994, *An Introduction to the Bootstrap,* Chapman & Hall, New York.
[7] Karlin, S. and Taylor, H. M., 1975, *A First Course in Stochastic Processes*, Academia Press Inc, London.
[8] Laksono, B. C., Widowati, N., dan Projo, K., 2023, *Pemodelan Analisis Rantai Markov untuk Mengestimasi Potensi Kasus Narkoba di Indonesia*, 715–722.
[9] Nopirin, 2011, *Ekonomi Internasional*, Yogyakarta, BPFE-UGM.
[10] Novianti, A. and Tri, D., 2021, *Implementation of Markov Chain in Detecting Opportunities for Natural Disasters in Klaten (Case Study : Number of Floods , Landslides , and Hurricanes 2019-2020)*, 1(2), 58–67.
[11] Norris, J.R., 1997, *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge.
[12] Ross, M. S., 1986, Stochastic Process, John wiley & Sons, Inc.
[13] Safitri, G.W & Astuti, Y.P., 2021, *Analisis Pertambahan Pasien Positif Dan Pasien Sembuh Covid-19 Di Jawa Timur Menggunakan Metode Rantai Markov*, MATH unesa, 09(01), 164-170.
[14] Somayasa, I. W, 2023, *Pengantar Teori Peluang dan Statistika Matematika,* Deepublish Publisher, Yogyakarta.
[15] Wulandari, S., dkk., 2021, *Markov Analysis Of Water Discharge As An Indicator Of Surface Water Security Of The Bandung Basin*, Jurnal Pendidikan IPA Indonesia, 10(4), 596–606.
[16] Yin, G. G. dan Zhang, Q., 2005, *Application of Mathematics: Stochastic Modelling and Applied Probability*, Springer Science and Business Media, Inc. Los Angeles.