

## ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI RAYLEIGH PADA SAMPEL TERSENSOR TIPE II

Siti Hapsah<sup>1)</sup>, Wayan Somayasa<sup>1,\*</sup> dan Norma Mukhtar<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, 93232, Indonesia

E-mail korespondensi: \* [wayan.somayasa@uho.ac.id](mailto:wayan.somayasa@uho.ac.id)

### ABSTRAK

#### Sejarah Artikel:

Diterima: 13-03-2025

Direvisi: 30-08-2025

Diterima untuk

dipublikasikan: 31-08-2025

#### Kata Kunci:

Lifetime Test Analysis

Data, Type II Censored

Data, Rayleigh

Distribution, Eksponensial

Distribution, Maximum

Likelihood Method.

Analisis data uji hidup adalah metode statistik yang digunakan untuk mempelajari waktu hingga terjadinya suatu peristiwa, seperti kematian atau kegagalan. Data yang dijelaskan sering kali berupa data tersensor di mana informasi mengenai waktu suatu kejadian tidak sepenuhnya tersedia. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengestimasi parameter distribusi Rayleigh pada sampel tersensor tipe II menggunakan metode likelihood maksimum. Dalam melakukan estimasi interval kepercayaan dilakukan dengan melakukan transformasi variabel distribusi Rayleigh dengan parameter ( $\lambda$ ) dibawah kasus tersensor tipe II menjadi variabel distribusi eksponensial dengan parameter ( $\lambda^2$ ) yang saling bebas. Pada penerapannya terhadap sampel pengamatan 24 mesin pengemas diperoleh nilai duga parameter  $\lambda^2 = 297.7565$  sehingga nilai duga untuk  $\lambda = 17.25562$ .



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

### 1. Pendahuluan

Konsep dasar teori probabilitas dan statistika adalah sebuah fungsi yang memberikan nilai numerik (probabilitas) pada suatu peristiwa. Sebuah "peristiwa" dalam konteks ini adalah segala keadaan yang dapat terjadi, termasuk yang disebut sebagai "peristiwa kosong" yaitu suatu keadaan yang tidak mungkin terjadi. Probabilitas ini memungkinkan kita untuk mengukur dan memahami tingkat keyakinan atau kejadian suatu peristiwa dalam suatu konteks. Dengan demikian, teori probabilitas dan statistika memberikan landasan matematis untuk analisis dan interpretasi data, memungkinkan kita membuat keputusan informasional dan membuat estimasi berdasarkan bukti empiris yang ada (Gaifman dan Snir, 1982).

Salah satu fungsi utama statistika adalah menemukan pemodelan statistik yang efisien untuk peristiwa kehidupan alam dalam bentuk distribusi probabilitas yang diketahui. Distribusi probabilitas digunakan untuk memodelkan fenomena kehidupan alam yang bercirikan ketidak pastian dan risiko. Banyak distribusi probabilitas yang diturunkan karena fenomena kehidupan alam bersifat kompleks dan sangat sulit dimodelkan dengan distribusi klasik. Namun, distribusi probabilitas yang diketahui masih belum mampu mewakili data beberapa fenomena alam secara akurat. Hal ini mengarah pada perluasan dan modifikasi distribusi probabilitas umum. Penambahan beberapa

parameter baru pada distribusi probabilitas yang diketahui meningkatkan kualitas kesesuaian data fenomena alam dan akurasi yang lebih tinggi dalam mendeskripsikan bentuk ekor distribusi (Almongy dkk., 2021).

Analisis uji hidup merupakan salah satu kumpulan dari prosedur statistika untuk analisis data di mana variabelnya adalah waktu sampai terjadinya kejadian. Pada analisis data uji hidup objek penelitian adalah penyelidikan tentang daya tahan hidup atau keandalan, yang menghasilkan data waktu hidup (survival) (Purwanto, 2023). Ketahanan hidup (survival) adalah probabilitas suatu objek akan beroperasi tanpa adanya kejadian (event) untuk waktu yang ditentukan di bawah kondisi yang disyaratkan. Kejadian (event) dapat berupa kematian, kesembuhan, kekambuhan, kerusakan alat atau bahan, insiden penyakit, pemulihan, dan sebagainya. Analisis data tahan hidup (survival data analysis) adalah alat yang digunakan untuk mendeskripsikan data tahan hidup. Data tahan hidup (survival data) adalah data waktu terjadinya suatu peristiwa dari awal pengamatan sampai dengan waktu berakhirnya pengamatan.

Dalam berbagai distribusi yang digunakan dalam analisis data uji hidup tentunya terdapat parameter yang tidak diketahui. Parameter merupakan suatu konstanta yang tidak diketahui yang menggambarkan karakteristik dari suatu populasi. Karenanya nilainya tidak diketahui, maka perlu dilakukan penduga parameter atau estimasi parameter. Estimasi parameter adalah penaksiran terhadap nilai-nilai parameter populasi berdasarkan data atau sampel yang diambil dari populasi. Salah satu metode yang umum digunakan untuk mengestimasi parameter adalah maximum likelihood estimation (MLE). MLE merupakan suatu metode pendugaan parameter yang memaksimalkan fungsi likelihood. Namun, beberapa kasus model distribusi terdapat fungsi yang berbentuk nonlinear sehingga tidak bisa diselesaikan secara analitik, oleh karena itu untuk menyelesaikannya digunakan pendekatan secara numerik, seperti metode Newton-Raphson (Purwanto, 2023).

Pengamatan pada data tahan hidup dengan data lengkap (complete data) untuk setiap objek tidak selalu bisa tersedia. Data lengkap mengharuskan setiap objek diamati sejak awal masuk ke dalam pengamatan sampai dengan objek tersebut mengalami kejadian (event) yang telah ditentukan. Pada prakteknya, ada kemungkinan objek-objek tersebut keluar dari pengamatan sebelum ada kejadian (event), objek tidak mengalami kejadian (event) selama masa pengamatan, dan sebagainya. Sehingga tidak setiap objek dapat dihitung data tahan hidupnya. Kondisi seperti ini membutuhkan tipe data tersensor, yaitu objek tidak dapat ditentukan data tahan hidupnya (Tarno dkk., 2021).

Ada dua skema penyensoran yang umum digunakan yaitu penyensoran tipe I dan penyensoran tipe II. Sensor tipe I adalah tipe penyensoran di mana percobaan akan dihentikan setelah mencapai waktu  $T$  yang telah ditentukan untuk mengakhiri semua  $n$  individu yang masuk pada waktu yang sama. Berakhirnya waktu uji  $T$  menjelaskan waktu sensor uji, dengan kata lain jika tidak terdapat individu yang hilang secara tiba-tiba, maka waktu tahan hidup observasi tersensor sama dengan lama waktu pengamatan (Prayudhani dan Wuryandari, 2010). Data sensor tipe II adalah data waktu tahan hidup yang diperoleh setelah observasi mengalami kegagalan sebanyak  $r$  dari  $n$  individu yang ada. Pada data sensor tipe II, semua unit uji  $n$  masuk pada waktu yang bersamaan dan jika terdapat individu yang hilang secara tiba-tiba maka waktu tahan hidup observasi tersensor adalah waktu tahan hidup observasi tidak tersensor terbesar. Observasi akan berakhir jika telah ditemukan sejumlah  $r$  kegagalan (Afranda dkk., 2015).

Dalam teori probabilitas dan statistika, distribusi Rayleigh adalah salah satu distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam pemodelan data kelangsungan hidup. Distribusi Rayleigh diperkenalkan oleh Lord Rayleigh pada tahun 1880. Distribusi Rayleigh dikenal secara luas di bidang oseanografi dan dalam teori komunikasi untuk menggambarkan puncak saat kekuatan sinyal radio diterima. Distribusi ini juga merupakan distribusi penting dalam statistik dan juga diterapkan di beberapa bidang seperti bidang kesehatan pada uji klinis obat baru, bidang pertanian digunakan untuk memodelkan interval waktu kerusakan atau pembusukan produk pertanian selama penyimpanan,

bidang biologi antara lain digunakan untuk menganalisis daya tahan hidup suatu organisme di suatu lingkungan tertentu, dan ilmu-ilmu lainnya.

## 2. Kajian Pustaka

### 2.1 Analisis Survival

**Definisi 2.1.1 (Suyitno dkk., 2020)** Analisis survival atau yang biasa dikenal sebagai analisis ketahanan hidup merupakan prosedur statistika yang digunakan untuk menganalisis data waktu antar event. Analisis survival biasa digunakan untuk menganalisis durasi dari suatu waktu tertentu sampai munculnya suatu kejadian khusus.

#### 2.1.1 Waktu Uji Hidup

Waktu uji hidup ( $T$ ) merupakan variabel random non-negatif yang mewakili ketahanan hidup dari individu-individu dari suatu populasi. Variabel random ( $T$ ) merupakan variabel random kontinu dalam selang  $[0, \infty)$  atau ketahanan hidup pada waktu  $t$  dengan  $t > 0$ . Waktu tahan hidup ( $T$ ) akan membentuk suatu distribusi yang disebut dengan distribusi waktu hidup (Tarmo dkk., 2021).

#### 2.1.2 Penyensoran

**Definisi 2.1.2 (Kundu dkk., 2016)** Penyensoran adalah proses di mana data dari suatu unit pengamatan dihentikan atau disensor pada titik tertentu dalam percobaan, sering kali karena unit tersebut mencapai titik kegagalan atau karena eksperimen berakhir pada waktu tertentu.

Adapun penyensoran yang digunakan dalam penelitian ini adalah penyensoran tipe II. Data sensor tipe II adalah data waktu tahan hidup yang diperoleh setelah observasi mengalami kegagalan sebanyak  $r$  dari  $n$  individu yang ada. Pada data sensor tipe II, semua unit uji  $n$  masuk pada waktu yang bersamaan dan jika terdapat individu yang hilang secara tiba-tiba maka waktu tahan hidup observasi tersensor adalah waktu tahan hidup observasi tidak tersensor terbesar. Observasi akan berakhir jika telah ditemukan sejumlah  $r$  kegagalan (Afranda dkk., 2015).

Data tersensor tipe II terdiri dari  $r$  waktu hidup terkecil  $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(r)}$  dari sampel acak  $n$  waktu hidup  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}$  dari distribusi uji hidup. Jika  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}$  berdistribusi identik serta berdistribusi kontinu dengan fungsi kepadatan peluang  $f(t)$  dan fungsi *survival*  $S(t)$ , yang merupakan sampel terurut maka fungsi kepadatan peluang bersama dari  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}$  adalah sebagai berikut.

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(t_{(i)}) [S(t_{(r)})]^{n-r}. \quad (2.1.4)$$

#### 2.1.3 Fungsi Kepadatan Peluang

**Definisi 1.1 (Prayudhani dan Wuryandari, 2010)** *Probabilitas density function* (pdf) atau fungsi kepadatan peluang adalah peluang kegagalan suatu objek pada interval  $(t, t + \Delta t)$  persatuan waktu.

Fungsi kepadatan peluang dinotasikan dengan  $f(t)$  dan dirumuskan sebagai berikut :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right] \quad (2.1.5)$$

Jika  $T$  merupakan variabel acak positif pada interval  $[0, \infty]$  maka  $F(t)$  yang merupakan fungsi distribusi kumulatif dirumuskan sebagai berikut.

$$F(t) := P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx \quad (2.1.6)$$

### 2.1.4 Fungsi Survival

**Definisi 2.1.5 ( Lee dan Wang, 2003)** Fungsi *survival* dinotasikan dengan  $S(t)$  adalah probabilitas bahwa subjek *survive* lebih lama dari pada waktu  $t$  atau probabilitas bahwa variabel random  $T$  melebihi waktu  $t$  yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S(t) &= P(T > t) \\ &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - F(t) . \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

### 2.1.5 Fungsi Hazard

Fungsi *hazard* adalah laju suatu individu mengalami kematian atau kegagalan pada interval waktu  $t$  sampai  $t+\Delta t$  apabila diketahui individu tersebut belum mengalami kegagalan sampai dengan waktu  $t$  (Prayudhani dan Wuryandari, 2010). Fungsi *hazard* dapat dirumuskan sbb:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\}}{\Delta t} = \frac{F'(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (2.1.11)$$

## 2.2 Distribusi Eksponensial

**Definisi 2.3.1 (Somayasa, 2019)** Suatu variabel acak  $X$  dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter  $\theta > 0$ , jika  $X$  mempunyai PDF sebagai berikut :

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0. \quad (2.3.1)$$

Selanjutnya dinotasikan dengan  $X \sim \text{EXP}(\theta)$ .

## 2.3 Distribusi Rayleigh

Menurut Akhter dan Hirai, 2009 fungsi kepadatan peluang dari distribusi Rayleigh adalah sebagai berikut

$$f(t) = \frac{2t}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{t^2}{\lambda^2}\right\}, t \geq 0, \lambda > 0. \quad (2.4.1)$$

Berdasarkan Persamaan (2.1.6) fungsi distribusi komulatif distribusi Rayleigh dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut :

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(x) dx \\ &= \int_0^t \frac{2x}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{\lambda^2}\right\} dx \\ &= -\exp\left\{-\frac{t^2}{\lambda^2}\right\} + 1. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Dari Persamaan 2.1.8 fungsi *survival* untuk distribusi Rayleigh dirumuskan sebagai berikut :

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \left(-\exp\left\{-\frac{t^2}{\lambda^2}\right\} + 1\right) \\
 &= \exp\left\{-\frac{t^2}{\lambda^2}\right\}.
 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Berdasarkan Persamaan (2.1.11) diperoleh fungsi *hazard* dari distribusi Rayleigh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{f(t)}{s(t)} \\
 &= \frac{\frac{2t}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{t^2}{\lambda^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{t^2}{\lambda^2}\right\}} \\
 &= \frac{2t}{\lambda^2}
 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

## 2.4 Estimasi Titik dengan Metode *Likelihood* Maksimum

Estimasi (perkiraan) merupakan seluruh proses yang menggunakan suatu estimator untuk menghasilkan suatu hasil estimasi dari suatu parameter. Estimator adalah statistik yang digunakan untuk mengestimasi suatu parameter dan hasil estimasi adalah nilai kuantitas dari suatu statistik seperti nilai rata-rata atau variansi suatu sampel (Rarasati, 2012).

Menurut Misbahussurur (2009), langkah-langkah penentuan estimasi titik menggunakan *maximum likelihood estimator* (MLE) yaitu :

1. Menentukan fungsi *likelihood*, yaitu fungsi yang menggambarkan peluang data sampel untuk setiap nilai parameter yang mungkin.
2. Menentukan nilai logaritma natural dari fungsi *likelihood* atau  $\ln L(\theta)$ . Fungsi ini lebih mudah diturunkan dan dimaksimalkan dari pada fungsi *likelihood*.
3. Memaksimumkan fungsi  $\ln L(\theta)$  dengan cara mencari nilai parameter yang membuat turunan pertama dari fungsi  $\ln L(\theta_1, \dots, \theta_k) = 0$  dan turunan kedua fungsi  $\ln L(\theta) < 0$ . maka nilai parameter tersebut adalah estimasi titik MLE.

Dalam pemilihan penduga terbaik suatu parameter perlu memperhatikan sifat ketakbiasan dan UMVUE dari suatu penduga parameter, yang akan dijelaskan sebagai berikut

**Definisi 1.2 (Misbahussurur, 2009)** Suatu statistik dikatakan tak bias dari suatu parameter populasi apabila nilai mean atau ekspektasi dari statistik itu sama dengan parameter yang ditaksir. Misalkan suatu statistik  $\hat{\theta}$  dikatakan penaksiran tak bias terhadap parameter  $\theta$  apabila  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

**Teorema 1.1 (Somayasa, 2019, hal. 169).** Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  merupakan sampel acak dari populasi dengan *PDF*  $f_X(X; \theta), \theta \in \Theta$ . Jika  $T := t(X_1, \dots, X_n)$  merupakan penduga tak bias untuk  $\tau(\theta)$ , dan jika  $\tau'(\theta) := \frac{d\tau(\theta)}{d(\theta)}$  ada. Maka batas bawah Cramér- Rao untuk  $\tau(\theta)$  adalah

$$\text{Var}(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nE\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_i; \theta)\right)^2} \tag{2.5.1}$$

**Definisi 1.2 (Somayasa, 2019).** Jika  $\text{Var}(T)$  mencapai batas bawah bawah Cramér- Rao maka  $T$  merupakan UMVUE dan dikatakan sebagai penduga terbaik.

## 2.5 Fungsi *Likelihood* Distribusi Rayleigh

Misalkan sampel terurut  $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$  merupakan  $r$  waktu hidup terkecil dari  $n$  pengamatan, jika  $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(r)}$  berdistribusi identik serta berdistribusi kontinu dengan fungsi kepadatan peluang  $f(t)$  dan fungsi *survival*  $S(t)$ , maka berdasarkan Persamaan (2.1.4) fungsi *likelihood* untuk sampel tersensor tipe II dari  $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(r)}$  adalah

$$L(\lambda) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{2}{\lambda^2}\right)^r \prod_{i=1}^r t_{(i)} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^r t_{(i)}^2\right\} \exp\{n - (2.7.3)$$

## 2.6 Transformasi Variabel

Misalkan  $X: S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah suatu variabel acak dan  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adalah suatu fungsi. Maka  $Y = g(X)$  adalah Variabel acak juga. Berikut adalah Definisi yang digunakan untuk menentukan *PDF* dan juga *CDF* dari  $g(X)$ :

**Definisi 1.2 (Somayasa, 2019).** Misalkan  $X$  merupakan variabel acak kontinu dengan *PDF*  $f_X$ , dan misalkan  $Y = g(X)$  di mana  $g$  adalah fungsi monoton. Andaikan bahwa  $f_X$  kontinu pada  $\Omega_X$  dan  $g^{-1}(y)$  terdiferensialkan pada  $\Omega_Y$ , maka *PDF* dari  $Y$  adalah

$$f_Y(y) = \begin{cases} (f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|) & ; y \in \Omega_Y \\ 0 & ; x \notin \Omega_Y \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Selanjutnya untuk transformasi yang melibatkan dua atau lebih variabel acak pada dimensi tinggi untuk kasus distribusi kontinu dapat digunakan Definisi berikut :

**Definisi 1.3 (Somayasa, 2019).** Misalkan  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$  merupakan vektor acak kontinu dengan *PDF* bersama  $f_X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Misalkan  $\mathbf{Y} = \mathbf{u}(x)$  mempunyai balikan  $x_i = u_i^{-1}(y), i = 1, \dots, k$ . Jika Jacobian Transformasi bersifat kontinu dan tidak nol pada daerah nilai dari  $\mathbf{u}$ , *PDF* Bersama dari  $\mathbf{Y}$  adalah

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_k) = \sum_{j=1}^p f_X(x_1, \dots, x_k) |J|. \quad (2.8.2)$$

## 2.7 Uji Goodness of Fit

Uji *goodness of fit* adalah teknik yang digunakan untuk menilai sejauh mana model statistik cocok dengan data sampel yang diamati. Dalam konteks ini, kita ingin memastikan bahwa model yang digunakan sesuai dengan distribusi teoritis tertentu, seperti distribusi normal, distribusi gamma atau distribusi weibull. Secara spesifik, uji *goodness of fit* sering digunakan untuk menguji apakah data berasal dari populasi dengan distribusi tertentu ( D'Agostino dan Stephens, 1986).

Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  merupakan sampel acak dari suatu populasi dengan fungsi distribusi kumulatif  $F(x)$ , maka pengujian hipotesis berbentuk  $H_0: F(x) = F_0(x)$  vs  $H_1: F(x) \neq F_0(x)$ , di mana  $F_0(x)$  adalah fungsi distribusi yang ditentukan. Dalam kasus univariat  $H_0$  dapat diuji dengan menggunakan

statistik Kolmogorov-Smirnov dengan statistik uji pengukuran jarak antara  $F_n(x)$  dan  $F_0(x)$  sebagai berikut (Justel dkk., 1997):

$$D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$$

Di mana  $F_n$  adalah fungsi distribusi empiris dari sampel.

$$F_n(x) = \frac{\text{banyaknya } \{x_i \leq x\}}{n} \tag{2.9.1}$$

Adapun hipotesis Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut:

$H_0: F(x) = F_0(x)$ , populasi mengikuti distribusi tertentu

$H_1: F(x) \neq F_0(x)$ , populasi tidak mengikuti distribusi tertentu

Statistik uji:

$$D_n = \sup |F_n(x) - F(x)| \tag{2.9.2}$$

Keputusan :

$H_0$  ditolak pada tingkat signifikansi  $\alpha$  jika nilai  $D_n \geq D_\alpha$  pada tabel Kolmogorov Smirnov.

Tabel 2.9.1 Nilai Kritis Kolmogorov-Smirnov (<https://real//-statistics.com/statistics-tables/Kolmogorov-smirnov-table/>)

$n \setminus \alpha$	0.001	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2
1		0.99500	0.99000	0.97500	0.95000	0.92500	0.90000
2	0.97764	0.92930	0.90000	0.84189	0.77639	0.72614	0.68377
3	0.92063	0.82900	0.78456	0.70760	0.63604	0.59582	0.56481
4	0.85046	0.73421	0.68887	0.62394	0.56522	0.52476	0.49265
5	0.78137	0.66855	0.62718	0.56327	0.50945	0.47439	0.44697
6	0.72479	0.61660	0.57741	0.51926	0.46799	0.43526	0.41035
7	0.67930	0.57580	0.53844	0.48343	0.43607	0.40497	0.38145
8	0.64098	0.54180	0.50654	0.45427	0.40962	0.38062	0.35828
9	0.60846	0.51330	0.47960	0.43001	0.38746	0.36006	0.33907
10	0.58042	0.48895	0.45662	0.40925	0.36866	0.34250	0.32257
11	0.55588	0.46770	0.43670	0.39122	0.35242	0.32734	0.30826
12	0.53422	0.44905	0.41918	0.37543	0.33815	0.31408	0.29573
13	0.51490	0.43246	0.40362	0.36143	0.32548	0.30233	0.28466
14	0.49753	0.41760	0.38970	0.34890	0.31417	0.29181	0.27477
15	0.48182	0.40420	0.37713	0.33760	0.30397	0.28233	0.26585
16	0.46750	0.39200	0.36571	0.32733	0.29471	0.27372	0.25774
17	0.45440	0.38085	0.35528	0.31796	0.28627	0.26587	0.25035
18	0.44234	0.37063	0.34569	0.30936	0.27851	0.25867	0.24356
19	0.43119	0.36116	0.33685	0.30142	0.27135	0.25202	0.23731
20	0.42085	0.35240	0.32866	0.29407	0.26473	0.24587	0.23152
25	0.37843	0.31656	0.30349	0.26404	0.23767	0.22074	0.20786
30	0.34672	0.28988	0.27704	0.24170	0.21756	0.20207	0.19029
35	0.32187	0.26898	0.25649	0.22424	0.20184	0.18748	0.17655
40	0.30169	0.25188	0.23993	0.21017	0.18939	0.17610	0.16601
45	0.28482	0.23780	0.22621	0.19842	0.17881	0.16626	0.15673
50	0.27051	0.22585	0.21460	0.18845	0.16982	0.15790	0.14886
<b>OVER 50</b>	<b>1.94947</b>	<b>1.62762</b>	<b>1.51743</b>	<b>1.35810</b>	<b>1.22385</b>	<b>1.13795</b>	<b>1.07275</b>
	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$

### 3 Hasil dan Pembahasan

### 3.1 Estimasi Titik Dengan Metode *Likelihood Maximum*

Distribusi Rayleigh untuk sampel tersensor tipe II memiliki parameter  $\lambda$  yang belum diketahui, sehingga parameter tersebut akan diestimasi terlebih dahulu. Metode estimasi yang digunakan adalah *likelihood* maksimum. Pada metode *likelihood* maksimum, penduga  $\lambda$  ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan  $\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ .

Selanjutnya ditentukan penduga *likelihood* maksimum parameter dari distribusi Rayleigh berdasarkan sampel tersensor tipe II. Berdasarkan fungsi *likelihood* yang diperoleh pada Persamaan (2.7.3) maka selanjutnya fungsi  $\ln(\lambda)$  yaitu,

$$\ln L(\lambda) = \ln \left( \frac{n!}{(n-r)!} \right) + r \ln 2 - 2r \ln \lambda + \sum_{i=1}^r \ln t_{(i)}^2 - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 - (n - r) \left( \frac{t_{(r)}^2}{\lambda^2} \right) \quad (4.1.1)$$

Penduga  $\hat{\lambda}$  diperoleh dari penyelesaian persamaan  $\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ .

$$\Leftrightarrow -\frac{2r}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3} \sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r) \left( \frac{2t_{(r)}^2}{\lambda^3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r}}$$

Selanjutnya dilakukan uji turunan kedua untuk mengetahui sifat maksimum atau minimum dari fungsi  $\ln L(\lambda)$  pada titik stasionernya.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} < 0 \Bigg|_{\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r}}} \\ = \frac{2r}{\lambda^2} - \frac{6}{\lambda^4} \sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 - 6(n-r) \left( \frac{t_{(r)}^2}{\lambda^4} \right) \Bigg|_{\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r}}} \\ = \frac{-4r^2}{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Persamaan (4.1.3) bernilai negatif sehingga

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r}},$$

adalah titik maksimum, sehingga penduga *likelihood* maksimum untuk  $\lambda$  adalah

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r}} \quad (4.1.4)$$

Atau

$$\widehat{\lambda}^2 = \frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r} \quad (4.1.6)$$

### 3.2 Uji Hipotesis dan Estimasi Interval Kepercayaan Parameter Populasi

Untuk mengkonstruksi uji hipotesis pada interval kepercayaan parameter  $\lambda$  perlu ditentukan suatu kuantitas pivot untuk  $\lambda$ . Kuantitas pivot untuk  $\hat{\lambda}$  dapat diperoleh dengan transformasi variabel

$$Y_{(i)} = g(t) = t^2, t > 0 \quad (4.2.1)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (4.2.2)$$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}. \quad (4.2.3)$$

Sesuai Definisi 1.2 diperoleh *PDF* dari  $Y$  adalah

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{2\sqrt{y}}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{y}{\lambda^2}\right\} \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{y}{\lambda^2}\right\}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Perhatikan persamaan

(4.2.4) adalah *PDF* marginal dari distribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$  sehingga dapat disimpulkan bahwa  $y$  berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ . Dari penjabaran sebelumnya diperoleh informasi bahwa, jika  $t$  berdistribusi Rayleigh maka  $y = t^2$  akan berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ . Karena  $y$  berdistribusi eksponensial maka dapat digunakan teorema berikut

**Teorema 4.2.1 (Lawless, 2003).** Misalkan  $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(r)}$  adalah  $r$  pengamatan terurut pertama dari sampel berukuran  $n$  yang berdistribusi eksponensial, maka  $w_1, w_2, \dots, w_r$  saling bebas dan berdistribusi identik dengan  $w_i = (n - i + 1)(t_{(i)} - t_{(i-1)})$ . Misalkan  $T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n - r)t_{(r)} = \sum_{i=1}^r w_i$  sehingga berlaku

$$\frac{2T}{\theta} \sim X^2(2r).$$

Atau

$$\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n - r)t_{(r)})}{\theta} \sim X^2(2r). \quad (4.2.5)$$

Berdasarkan Teorema 4.2.1 untuk kasus distribusi Rayleigh didefinisikan  $w_i = (n - i + 1)(y_{(i)} - y_{(i-1)})$  akan dibuktikan bahwa  $w_1, w_2, \dots, w_r$  adalah sampel acak berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ . Pembuktian akan dilakukan dengan menggunakan Definisi 1.3 hal ini dapat dilihat sebagai berikut:

$$w_i = (n - i + 1)(y_{(i)} - y_{(i-1)}) \quad (4.2.6)$$

Sehingga berlaku

$$w_1 = ny_{(1)}$$

$$w_2 = (n - 1)(y_{(2)} - y_{(1)})$$

$$w_3 = (n - 2)(y_{(3)} - y_{(2)})$$

$$\vdots$$

$$w_r = (n - r + 1)(y_{(r)} - y_{(r-1)})$$

Maka :

$$y_{(1)} = \frac{w_1}{n}$$

$$y_{(2)} = \frac{w_2}{n-1} + y_{(1)} = \frac{w_2}{n-1} + \frac{w_1}{n}$$

$$y_{(3)} = \frac{w_3}{n-2} + y_{(2)} = \frac{w_3}{n-2} + \frac{w_2}{n-1} + \frac{w_1}{n}$$

$$\vdots$$

$$y_{(r)} = \frac{w_r}{n-r+1} + \frac{w_{r-1}}{n-r-1} + \dots + \frac{w_1}{n}$$

Sehingga matriks Jacobian untuk  $w_i$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{(1)}}{\partial w_1} & \frac{\partial y_{(1)}}{\partial w_2} & \frac{\partial y_{(1)}}{\partial w_3} & \dots & \frac{\partial y_{(1)}}{\partial w_r} \\ \frac{\partial y_{(2)}}{\partial w_1} & \frac{\partial y_{(2)}}{\partial w_2} & \frac{\partial y_{(2)}}{\partial w_3} & \dots & \frac{\partial y_{(2)}}{\partial w_r} \\ \frac{\partial y_{(3)}}{\partial w_1} & \frac{\partial y_{(3)}}{\partial w_2} & \frac{\partial y_{(3)}}{\partial w_3} & \dots & \frac{\partial y_{(3)}}{\partial w_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{(r)}}{\partial w_1} & \frac{\partial y_{(r)}}{\partial w_2} & \frac{\partial y_{(r)}}{\partial w_3} & \dots & \frac{\partial y_{(r)}}{\partial w_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{n-r+1} \end{bmatrix}$$

$$|J| = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{n-2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)} \tag{4.2.7}$$

Selanjutnya  $w_i = (n - i + 1)(y_{(i)} - y_{(i-1)})$  dengan  $y_{(0)} = 0$  mempunyai sifat bahwa

$$\sum_{i=1}^r w_i = \sum_{i=1}^r y_{(i)} + (n - r)y_{(r)}. \tag{4.2.8}$$

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^r y_{(i)} + (n - r)y_{(r)} = \sum_{i=1}^r w_i$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^r (n-i+1)(y_{(i)} - y_{(i-1)}) \\
 &= \sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{(i)} - \sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{(i-1)} \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{(i-1)} &= \sum_{i=0}^{r-1} (n-(i-1)+1)y_{(i)} \\
 &= \sum_{i=0}^{r-1} (n-i)y_{(i)}
 \end{aligned}$$

Karena  $y_0 = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned}
 &= (n-0)y_0 + \sum_{i=1}^{r-1} (n-i)y_{(i)} \\
 &= (n)0 + \sum_{i=1}^{r-1} (n-i)y_{(i)} \\
 &= \sum_{i=1}^{r-1} (n-i)y_{(i)}
 \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^r w_i &= \sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{(i)} - \sum_{i=1}^{r-1} (n-i)y_{(i)} \\
 &= (n-r+1)y_{(r)} + \sum_{i=1}^{r-1} (n-i+1)y_{(i)} - \sum_{i=1}^{r-1} (n-i)y_{(i)} \\
 &= (n-r+1)y_{(r)} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (n-i \\
 &\quad + 1)y_{(i)} \\
 &\quad - (n-i)y_{(i)} \\
 &= (n-r+1)y_{(r)} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} ((n-i+1) \\
 &\quad - (n-i))y_{(i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n - r + 1)y_{(r)} + \sum_{i=1}^{r-1} y_{(i)} \\
 &= (n - r)y_{(r)} + y_{(r)} + \sum_{i=1}^{r-1} y_{(i)} \\
 &= \sum_{i=1}^r y_{(i)} \\
 &+ (n - r)y_{(r)}.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (2.3.10) maka fungsi kepadatan peluang bersama dari  $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}$  dibawah sensor tipe II adalah

$$f(y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{(\lambda^2)^r} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^r (y_{(i)} + (n-r)y_{(r)})\right\} \quad (4.2.9)$$

Sehingga berdasarkan Persamaan (4.2.9), Persamaan (4.2.7) dengan menerapkan rumus pada Persamaan (2.8.2) maka fungsi kepadatan peluang bersama dari  $w_1, w_2, \dots, w_r$  adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 f(w_1, w_2, \dots, w_r) &= f(y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}) |J| \\
 f(w_1, w_2, \dots, w_r) &= f(y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}) |J| \\
 &= \prod_{i=1}^r \frac{1}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{w_i}{\lambda^2}\right\} \quad (4.2.10)
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa adalah fungsi *likelihood* dari  $w_1, w_2, \dots, w_r$  yang berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$  yang saling bebas dan identik. Sehingga terbukti bahwa  $w_1, w_2, \dots, w_r$  adalah sampel acak dari populasi berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ .

Karena  $w_1, w_2, \dots, w_r$  adalah sampel acak berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$  maka berdasarkan Persamaan (4.2.9) diperoleh kuantitas pivot untuk  $\lambda^2$  adalah

$$\frac{2 \sum_{i=1}^r w_i}{\lambda^2} \sim \chi^2(2r). \quad (4.2.11)$$

Berdasarkan (4.2.11) selanjutnya dikonstruksikan interval kepercayaan  $(1 - \alpha)100\%$  untuk  $\lambda^2$  dapat dilihat sebagai berikut :

$$P \left\{ \frac{2 \sum_{i=1}^r w_i}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)} \leq \lambda^2 \leq \frac{2 \sum_{i=1}^r w_i}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)} \right\} = 1 - \alpha$$

Atau

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)} \leq \lambda^2 \leq \frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)} \right\} \\
 &= 1 - \alpha. \quad (4.2.12)
 \end{aligned}$$

Uji hipotesis terhadap parameter  $\lambda^2$  adalah:

$$H_0: \lambda^2 = \lambda_0^2 \text{ vs } H_1: \lambda^2 \neq \lambda_0^2$$

Menolak  $H_0$  pada tingkat signifikansi  $\alpha$  jika

$$\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} \geq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$$

atau

$$\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r).$$

Berdasarkan (4.2.12) dapat dikonstruksi interval kepercayaan  $(1 - \alpha)100\%$  untuk  $S(t_{(0)})$ , pada suatu

$$P \left\{ \exp \left\{ -\frac{t_{(0)}^2 \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)} \right\} \geq \exp \left\{ -\frac{t_{(0)}^2}{\lambda^2} \right\} \geq \exp \left\{ -\frac{t_{(0)}^2 \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)} \right\} \right\} = 1 - \alpha \quad (4.2.14)$$

Interval kepercayaan untuk fungsi *hazard*, untuk suatu  $t_{(0)}$ :

$$\left\{ \frac{2t_{(0)} \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)} \leq \frac{2t_{(0)}}{\lambda^2} \leq \frac{t_{(0)}^2 \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)} \right\} = 1 - \alpha \quad (4.2.16)$$

### 3.3 Uji Penduga Terbaik

Selanjutnya, akan dibuktikan apakah  $\widehat{\lambda^2}$  adalah penduga terbaik untuk  $\lambda^2$  di bawah kondisi sensor tipe II. Untuk mempermudah dalam melakukan pembuktian sifat penduga terbaik sebelumnya telah didefinisikan transformasi  $w_1, w_2, \dots, w_r$  yang di mana transformasi ini menghasilkan sampel baru yang bersifat saling bebas, identik dan berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ . Diketahui bahwa  $\bar{x}$  adalah penduga parameter untuk distribusi  $\text{EXP}(\theta)$ . Sehingga penduga parameter untuk sampel acak  $w_1, w_2, \dots, w_r$  yang berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$  adalah

$$\widehat{\lambda^2} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i}{r}$$

Berikut akan dibuktikan bahwa  $\widehat{\lambda^2}$  adalah penduga terbaik untuk  $\lambda^2$ .

#### 1. Bersifat Tak Bias

Berdasarkan Definisi 2.5.1 suatu penduga  $\widehat{\lambda^2}$  dikatakan tak bias terhadap parameter  $\lambda^2$  apabila  $E(\widehat{\lambda^2}) = \lambda^2$ . Sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(\widehat{\lambda^2}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^r w_i}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r} E\left(\sum_{i=1}^r w_i\right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r E(w_i) \\ &= \frac{1}{r} r \lambda^2 = \lambda^2. \end{aligned}$$

#### 2. UMVUE

Berdasarkan Teorema (2.5.1) berikut adalah batas bawah Cramér- Rao untuk  $\hat{\lambda}^2$ . adalah

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\hat{\lambda}^2) &\geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{rE\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(w_i; \theta)\right)^2} \\
 \Rightarrow rE\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(w_i; \theta)\right)^2 &= rE\left(\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\ln\left(\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{w}{\lambda^2}}\right)\right)^2 \\
 &= rE\left(\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\left(-\ln\lambda^2 - \frac{w}{\lambda^2}\right)\right)^2 \\
 &= rE\left(-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{w}{(\lambda^2)^2}\right)^2 \\
 &= rE\left(-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{w}{(\lambda^2)^2}\right)^2 \\
 &= rE\left(\frac{w - \lambda^2}{(\lambda^2)^2}\right)^2 \\
 &= r \cdot \frac{\text{Var}(w)}{(\lambda^2)^4} \\
 &= \frac{r}{(\lambda^2)^2} \\
 &= \frac{r}{(\lambda^2)^2} \tag{4.3.18}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.2.18) maka :

$$\begin{aligned}
 \frac{[\tau'(\theta)]^2}{rE\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(w_i; \theta)\right)^2} &= \frac{1}{\frac{r}{(\lambda^2)^2}} = \frac{(\lambda^2)^2}{r} \\
 &= \frac{(\lambda^2)^2}{r} \\
 \Rightarrow \text{Var}(\hat{\lambda}^2) &= \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^r w_i}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^r w_i\right) \\
 &= \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^r \text{Var}(w_i)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r} (\lambda^2)^2$$

Karena  $Var(\widehat{\lambda^2}) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{rE\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(w_i; \theta)\right)^2}$  maka  $\widehat{\lambda^2}$  adalah UMVUE.

Sehingga berdasarkan Definisi (2.5.2) dapat dikatakan bahwa  $\widehat{\lambda^2}$  adalah pnduga terbaik untuk  $\lambda^2$  ■

### 3.4 Analisis Data

Pada bagian ini akan diperagakan penerapan metode inferensi parameter distribusi Rayleigh berdasarkan sampel tersensor tipe II yang telah dikembangkan pada sub bab 4.1 dan 4.2 selanjutnya ditentukan interval kepercayaan dari parameter distribusi Rayleigh kemudian akan dilakukan uji hipotesis paramater populasi berdasarkan sampel tersensor tipe II.

Dilakukan pengamatan terhadap sampel tersensor tipe II yang diasumsikan berdistribusi Rayleigh. Data yang digunakan adalah data yang bersumber dari (Tamo dkk., 2021) yaitu data pengamatan terhadap 24 mesin pengemas. Data yang diperoleh adalah data waktu komponen produksi mesin sampai berhenti produksi. Pengamatan dilakukan pada waktu tertentu, terdapat 17 mesin yang berhenti produksi dan tersisa 7 mesin yang masih produksi.

**Tabel 4.4.1** Data waktu komponen produksi mesin sampai berhenti

No	t(minggu)	No	t (minggu)
1.	4	10.	13,5
2.	5,5	11.	13,6
3.	5,9	12.	15,7
4.	6,3	13.	16,2
5.	6,5	14.	16,6
6.	7,5	15.	17,2
7.	7,7	16.	17,7
8.	10,5	17.	18,5
9.	13,2		

Pengujian *goodness of fit* akan dilakukan sebagai langkah awal sebelum melakukan analisis inferensi parameter, uji hipotesis dan estimasi interval. Tujuan pengujian ini adalah mengecek apakah sampel yang digunakan mengikuti distribusi Rayleigh atau tidak. Berdasarkan Persamaan (diketahui bahwa  $w_1, w_2, \dots, w_r$  adalah sampel acak berdistribusi  $EXP(\lambda^2)$  di mana  $w_i = (n - i + 1)(y_{(i)} - y_{(i-1)})$  dan  $y = t^2$  dan  $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)}$  adalah sampel yang berdistribusi Rayleigh dibawah kasus sampel tersensor tipe II. Sehingga pengujian dapat menggunakan asumsi bahwa jika  $w_1, w_2, \dots, w_r$  berdistribusi  $EXP(\lambda^2)$  maka  $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)}$  adalah sampel yang berdistribusi Rayleigh dengan parameter  $\lambda$ .

Berdasarkan Persamaan (4.2.6) di mana  $n = 24$  dan  $r = 17$  diperoleh nilai sebagai berikut

$$w_1 = (24 - 1 + 1)(4^2) = 384,00$$

$$w_2 = (24 - 2 + 1)(5.5^2 - 4^2) = 327,75$$

Untuk lebih lengkapnya nilai dari  $w_i$  dapat dilihat pada tabel berikut :

**Tabel 4.4.2** Nilai  $w_i$

$i$	$w_i$	$i$	$w_i$
1.	384,00	10.	120,15
2.	327,75	11.	37,94
3.	100,32	12.	799,89
4.	102,48	13.	191,40
5.	51,20	14.	144,32
6.	266,00	15.	202,80
7.	54,72	16.	157,05
8.	866,32	17.	231,68
9.	1023,84		

Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji Kolmogorov-Smirnov

Di mana:

$$Y_j = F(w) = 1 - \exp\left\{-\frac{w}{\lambda^2}\right\} + 1, \hat{\lambda}^2 = 297,7565, r = 17 \text{ dan}$$

$$F_r(w) = \frac{\text{banyaknya } \{w_j \leq w\}}{r} = \frac{j}{r}$$

Perhitungan statistik uji  $D_r$  dapat dilihat pada tabel berikut:

**Tabel 4.4.3** Hitung Nilai Statistik Uji dari  $D_r$

$j$	$w$	$\frac{j}{r}$	$Y_j$	$\left \frac{j}{r} - Y_j\right $
1	37,94	0,0588	0,1196	0,0608
2	51,20	0,1176	0,1579	0,0403
3	54,72	0,1764	0,1678	0,0085
4	100,32	0,2352	0,2860	0,0507
5	102,48	0,2941	0,2911	0,0029
6	12015	0,3529	0,3320	0,0209
7	144,32	0,4117	0,3841	0,0276

8	157,05	0,4705	0,4098	0,0607
9	191,40	0,5294	0,4741	0,0552
10	202,80	0,5882	0,4939	0,0942
11	231,68	0,6470	0,5407	0,1063
12	266,00	0,7058	0,5907	0,1151
13	327,75	0,7647	0,6673	0,0973
14	384,00	0,8235	0,7246	0,0988
15	799,89	0,8823	0,9318	0,0495
16	866,32	0,9411	0,9454	0,0043
17	1023,84	1,0000	0,9678	0,0321
$\sup_{0 \leq y \leq Y_r}  F_r(w) - F(w) $				0,1151

Dari tabel diperoleh  $\sup_{0 \leq y \leq Y_r} |F_r(w) - F(w)| = 0,1151$  sehingga nilai statistik uji

$$D_r = 0.1151.$$

Hipotesis :  $H_0: F(w) = 1 - \exp\left\{-\frac{w}{\lambda^2}\right\}$  (populasi berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ ) vs

$$H_1: F(w) \neq 1 - \exp\left\{-\frac{w}{\lambda^2}\right\} \text{ (populasi tidak berdistribusi } \text{EXP}(\lambda^2)\text{)}$$

Statistik uji :

$$D_r = \sup |F_r(w) - F(w)| = 0,1151.$$

Keputusan :

$H_0$  ditolak pada tingkat signifikansi  $\alpha = 0,05$  jika dan hanya jika  $D_r \geq D_\alpha$  pada tabel Kolmogorov-Smirnov. Nilai  $D_r = 0,1151$  dan nilai  $D_{0,05} = 0,31796$ , karena  $D_r < D_{0,05}$  sehingga  $H_0$  tidak ditolak

pada tingkat signifikansi  $\alpha = 0,05$ . Nilai  $D_\alpha$  dapat dilihat pada

$n \backslash \alpha$	0.001	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2
1		0.99500	0.99000	0.97500	0.95000	0.92500	0.90000
2	0.97764	0.92930	0.90000	0.84189	0.77639	0.72614	0.68377
3	0.92063	0.82900	0.78456	0.70760	0.63604	0.59582	0.56481
4	0.85046	0.73421	0.68887	0.62394	0.56522	0.52476	0.49265
5	0.78137	0.66855	0.62718	0.56327	0.50945	0.47439	0.44697
6	0.72479	0.61660	0.57741	0.51926	0.46799	0.43526	0.41035
7	0.67930	0.57580	0.53844	0.48343	0.43607	0.40497	0.38145
8	0.64098	0.54180	0.50654	0.45427	0.40962	0.38062	0.35828
9	0.60846	0.51330	0.47960	0.43001	0.38746	0.36006	0.33907
10	0.58042	0.48895	0.45662	0.40925	0.36866	0.34250	0.32257
11	0.55588	0.46770	0.43670	0.39122	0.35242	0.32734	0.30826
12	0.53422	0.44905	0.41918	0.37543	0.33815	0.31408	0.29573
13	0.51490	0.43246	0.40362	0.36143	0.32548	0.30233	0.28466
14	0.49753	0.41760	0.38970	0.34890	0.31417	0.29181	0.27477
15	0.48182	0.40420	0.37713	0.33760	0.30397	0.28233	0.26585
16	0.46750	0.39200	0.36571	0.32733	0.29471	0.27372	0.25774
17	0.45440	0.38085	0.35528	0.31796	0.28627	0.26587	0.25035
18	0.44234	0.37063	0.34569	0.30936	0.27851	0.25867	0.24356
19	0.43119	0.36116	0.33685	0.30142	0.27135	0.25202	0.23731
20	0.42085	0.35240	0.32866	0.29407	0.26473	0.24587	0.23152
25	0.37843	0.31656	0.30349	0.26404	0.23767	0.22074	0.20786
30	0.34672	0.28988	0.27704	0.24170	0.21756	0.20207	0.19029
35	0.32187	0.26898	0.25649	0.22424	0.20184	0.18748	0.17655
40	0.30169	0.25188	0.23993	0.21017	0.18939	0.17610	0.16601
45	0.28482	0.23780	0.22621	0.19842	0.17881	0.16626	0.15673
50	0.27051	0.22585	0.21460	0.18845	0.16982	0.15790	0.14886
<b>OVER 50</b>	<b>1.94947</b>	<b>1.62762</b>	<b>1.51743</b>	<b>1.35810</b>	<b>1.22385</b>	<b>1.13795</b>	<b>1.07275</b>
	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$

$H_0$  tidak ditolak maka populasi dinyatakan berdistribusi Rayleigh.

Berdasarkan Persamaan (4.1.5) diperoleh nilai  $\widehat{\lambda^2}$  = Misalkan  $\lambda^2 = 297,8$  maka

Hipotesis terhadap  $\lambda^2$ :

$$H_0: \lambda^2 = 297.8 \text{ vs } H_1: \lambda^2 \neq 297.8$$

Statistik uji :

$$\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} = \frac{10.123}{297.8} = 33.99503$$

Keputusan :

$H_0$  ditolak pada Tingkat signifikansi  $\alpha = 0.05$  jika dan hanya jika nilai  $\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} \geq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)$

atau  $\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)$ . Diperoleh nilai  $\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} = 33.99503$ ,  $\chi_{0,975}^2(34) =$

51.966, dan  $\chi_{0,025}^2(34) = 19.806$ . Karena  $\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(34)$  dan  $\frac{2(\sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2)}{\lambda^2} >$

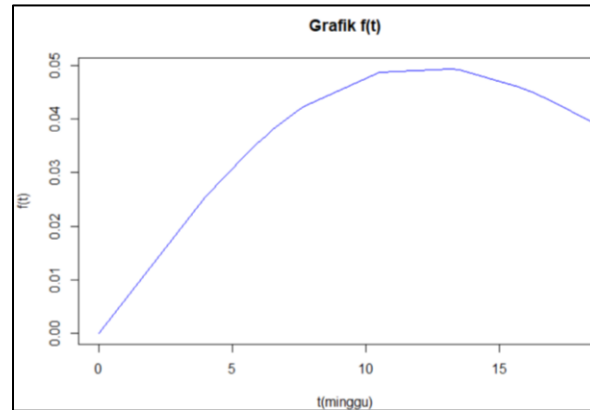
$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(34)$  maka  $H_0$  tidak ditolak.

Selanjutnya ditentukan estimasi interval kepercayaan untuk  $\lambda^2$  dari data waktu komponen produksi mesin sampai berhenti. Misalkan diberikan tingkat kepercayaan  $\alpha = 5\%$  maka

$$\Leftrightarrow P\{194,8143 \leq \lambda^2 \leq 511,1441\} = 95\%$$

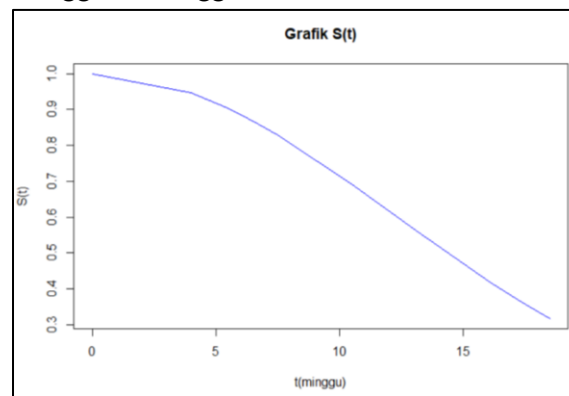
Jadi, interval kepercayaan 95% untuk  $\lambda^2$  adalah  $\{194.8143, 511.1441\}$ .

Pada sub bab sebelumnya dari data waktu hidup diperoleh estimasi parameter untuk  $\hat{\lambda}^2 = 297,7565$  maka  $\hat{\lambda} = 17.25562$ . fungsi kepadatan peluang (PDF) distribusi Rayleigh jika dijalankan menggunakan *software* R sebagai berikut



**Gambar 4.4.1** Fungsi Kepadatan Peluang Distribusi Rayleigh ( $\hat{\lambda}=17,25562$ )

Pada Gambar 4.4.1 dapat dilihat bahwa peluang terjadinya kematian mesin atau berhentinya mesin beroperasi yang paling besar disekitar  $t = 11,5$  minggu yaitu sekitar 0,04954196 dan akan mengalami penurunan disekitar  $t = 17,5$  minggu atau 0,04202658. Hal ini menunjukkan bahwa peluang berhentinya kemampuan mesin beroperasi paling besar di sekitaran  $t = 11,5$  minggu. Dengan menggunakan *software* R terlihat bentuk grafik fungsi *survival* komponen produksi mesin sampai berhenti dari minggu ke-minggu berikut :



**Gambar 4.4.2** Grafik Fungsi *Survival* Distribusi Rayleigh ( $\hat{\lambda}=17,25561$ )

Pada Gambar 4.4.2 dapat dilihat bahwa  $S(t)$  mengalami penurunan seiring bertambahnya nilai  $t$ , misalnya pada saat  $t = 0$  terlihat  $S(0) = 1$  atau peluang item bertahan pada saat mesin belum melakukan produksi, sedangkan pada saat  $t = 16,5$  minggu  $S(16,5) = 0,400781$ . Hal ini menunjukkan bahwa, peluang mesin bertahan setelah beroperasi selama 16,5 minggu adalah 0,400781 Sehingga, dapat

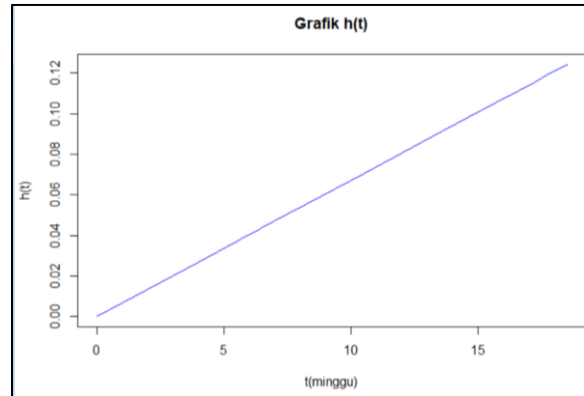
disimpulkan bahwa semakin lama suatu mesin beroperasi maka peluang mesin beroperasi semakin kecil.

Berdasarkan persamaan 4.2.14 akan ditentukan estimasi interval kepercayaan untuk  $S(t_o)$  dari data. Misalkan diberikan tingkat kepercayaan  $\alpha = 5\%$  dan  $t_o = 6$  minggu:

$$P\left\{0,8312777 \geq \exp\left\{-\frac{36}{\lambda^2}\right\} \geq 0,9319928\right\} = 95\%.$$

Jadi, interval kepercayaan 95% untuk  $S(6)$  adalah  $\{0,8312777, 0,9319928\}$ .

Fungsi *hazard*  $h(t)$ , yaitu laju kegagalan suatu item untuk bertahan hidup. Berikut grafik fungsi *hazard* dari sampel waktu hidup :



**Gambar 4.4.3** Grafik Fungsi *Hazard* Distribusi Rayleigh ( $\lambda = 17,25561$ )

Pada Gambar 4.4.3 dapat dilihat bahwa  $h(t)$  mengalami kenaikan seiring bertambahnya nilai  $t$ , hal ini menunjukkan bahwa semakin lama suatu mesin beroperasi, maka laju kegagalan mesin akan semakin besar.

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.2.16) estimasi interval kepercayaan untuk  $h(t_o)$  dari data waktu kemampuan produksi mesin. Misalkan diberikan tingkat kepercayaan  $\alpha = 5\%$  dan  $t_o = 13$  minggu sebagai berikut:

$$\left\{0,05087 \leq \frac{2(13)}{\lambda^2} \leq 0,13346\right\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan 95% untuk  $h(13)$  adalah  $\{0,01026618, 0,06159712\}$ .

## 4 Kesimpulan dan Saran

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Estimasi Parameter dari distribusi Rayleigh pada data tersensor tipe II dengan menggunakan metode *likelihood* maksimum diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n - r)(t_{(r)}^2)}{r}$$

atau

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_{(i)}^2) + (n-r)(t_{(r)}^2)}{r}}$$

2. Uji hipotesis untuk parameter populasi berdistribusi Rayleigh berdasarkan sampel tersensor tipe II memerlukan beberapa kali proses untuk memperoleh data yang saling bebas dan identik sehingga mempermudah dalam menentukan kuantitas pivot, mengkonstruksi selang kepercayaan, uji kriteria penduga terbaik parameter populasi, serta uji *goodnes of fit*. Dalam transformasi variabel distribusi rayleigh pada kasus tersensor tipe II, dilakukan dengan melakukan tranformasi  $y = t^2$  sehingga diperoleh variabel baru yang berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ , selanjutnya dilakukan kembali transformasi  $w_i = (n - i + 1)(y_{(i)} - y_{(i-1)})$  yang menghasilkan sampel acak  $w_1, w_2, \dots, w_r$  Berdistribusi  $\text{EXP}(\lambda^2)$ . Berikut selang kepercayaan Parameter  $\lambda^2$  distribusi Rayleigh pada sampel tersensor tipe II.

$$\left( \frac{2 \sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}, \frac{2 \sum_{i=1}^r t_{(i)}^2 + (n-r)t_{(r)}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)} \right).$$

Dengan menggunakan rumus diatas diperoleh selang kepercayaan untuk  $\lambda^2$  pada pada tingkat signifikansi  $\alpha = 5\%$  sebagai berikut

$$P\{194,8143 \leq \lambda^2 \leq 511,1441\} = 95\%.$$

3. Pada penelitian ini, inferensi asimtotik parameter Penerapan dari parameter estimasi *likelihood* maksimum distribusi Rayleigh pada data waktu hidup adalah waktu berhentinya mesin pengemas beroperasi.yaitu diperoleh informasi bahwa semakin lama suatu mesin pengemas beroperasi maka peluang atau kemampuan mesin bertahan hidup (*survive*) akan semakin kecil dan juga semakin lama mesin pengemas beroperasi maka laju kegagalan (*hazard*) akan semakin besar.

#### 4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis menunjukkan estimasi parameter distribusi Rayleigh berdasarkan sampel tersensor tipe II menggunakan metode *likelihood* maksimum, maka untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar peneliti lain dapat menunjukkan estimasi parameter dengan metode lain seperti metode kuadrat terkecil atau metode moment dan penulis juga menyarankan agar peneliti menunjukkan estimasi parameter untuk sampel tersensor tipe II pada distribusi lain dalam analisis uji hidup seperti distribusi gamma.

#### Daftar Pustaka

- [1] Afranda, O., Wuryandari, T., dan Ispriyanti, D. (2015). *Analisis Regresi Kegagalan Proporsional Dari Cox pada Data Waktu Tunggu Sarjana dengan Sensor Tipe I*. Jurnal Gaussian, 4(3), 621–630.  
 [2] Akhter, A.S. dan Hirai, A.S. (2009). *Estimation Of Scale Parameter from the Rayleigh Distribution from Type II Singly and Doubly Censored Data*. Pak.j.stat.oper.res. 5(1), 31-45.

- [3] Almongy, H.M., Almetwally, M.E., Aljohani, H.M., Hafez, A.H. (2021). *A New Extended Rayleigh Distribution with Applications of COVID-19 Data*. Science Direct, 21(1), 1-9.
- [4] Collett, D. (2015). *Modelling Survival Data in Medical Research. (Third Edition)*. CRC Press. Bristol.
- [5] D'Agostino, R. B. dan Stephens, M. A. (1986). *Goodness of Fit Techniques*. Marcel Dekker, INC. Dallas.
- [6] Gaifman, H. dan Snir, M. (1982). *Probabilities Over Rich Languages, Testing and Randomness*. The Journal Of Symbolic Logic, 47(3),495-548.
- [7] Justel, A., Pena, D., dan Zamar, R. (1997). *A Multivariate Kolmogorov-Smirnov Test of Goodness of Fit*. *Statistics and Probability Letters*, 35(1), 251–259.
- [8] Kleinbaum, D. dan Klein. (2005). *Survival Analysis: A Self-Learning Text (Second Edition)*. Springer Science. Newyork.
- [9] Kundu, D., Ng\*, H.K.T., dan Chan\*\*,P. S. (2016). *Statistical Analysis of Exponential Lifetimes under an Adaptive Type-II Progressive Censoring Scheme*. Department of Statistical Science, Southern Methodist University, Texas, USA.
- [10] Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. (Second Edition).Jhon Wiley and Sons, INC. Haboken.
- [11] Lee, E.T. dan Wang, J. W. (2003). *Statistical Methods for Survival Data Analys*. (Third Edition). A John Wiley & Sons, INC. Dallas.
- [12] Misbahussurur, A. (2009). *Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum Likelihood*. (UIN) Maulana Malik Ibrahim. Malang.
- [13] Prayudhani, O. dan Wuryandari, T. (2010). *Uji Hidup Dipercepat pada Distribusi Eksponensial Tersensor Tipe II dengan Tegangan Konstan*. *Medis Statistika*, 3(2), 69–78.
- [14] Purwanto, M. S. (2023). *Estimasi Parameter dari Distribusi Weibull Berdasarkan Sampel Tersensor Tipe II Progresif*. *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, 3(2), 150–164.
- [15] Rarasati, I. P. (2012). *Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang.
- [16] Sarasvati, S.A. (2017). *Penduga Parameter Distribusi dengan Metode kuadrat terkecil dan Metode Kemungkinan Maksimum*. Universitas Sanata Dharma. Yogyakarta.
- [17] Somayasa, W. (2019). *Statistika Matematika*. Deepublish. Yogyakarta.
- [18] Suyitno., Akbar, I. dan Wahyuningsih, I. (2020). *Model Regresi Cox Weibull Dengan Metode Penaksiran Parameter Efron Partial Likelihood (Studi Kasus : Lama Perawatan Pasien Penderita Tuberkulosis Di Puskesmas Loa Ipuh Tenggarong Tahun 2017)*. *Jurnal EKSPONENSIAL*, 11(1), 1-8.
- [19] Tarno., Maruddani, D. A. I., Hoyyi, A., Rahmawati,R., Wilandari, Y. (2021). *Survival Analisis*. UNDIP Press Semarang. Semarang.