Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

INFERENSI ASIMTOTIK MODEL REGRESI LINEAR UMUM

Rachmi Dwi Mulia Kasih[1], Wayan Somayasa[1*], Arman[1]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, 93232, Indonesia
*E-mail korespondensi: * wayan.somayasa@uho.ac.id*

Sejarah Artikel:
Diterima: 12-11-2024
Direvisi: 12-12-2024
Diterima untuk dipublikasikan: 15-12-2024

Kata Kunci:
generalize linear regression model, ordinary least square, limit distribution, asymptotic method

ABSTRAK

Model regresi linear umum adalah model yang berbentuk fungsi yang memetakan satu atau lebih variabel prediktor $(x_0, x_1 \dots, x_p)$ ke satu variabel respon (y) yang berbentuk $y = f(x_0, x_1 \dots, x_p) + \varepsilon$, dimana f adalah fungsi regresi yang tidak diketahui dan ε adalah variabel kesalahan yang bersifat acak. Dalam fungsi regresi, terdapat parameter-parameter yang tidak diketahui yang umumnya diestimasi dengan metode kuadrat terkecil. Melalui proses tersebut diperoleh model estimasi yang dapat digunakan untuk memprediksi variabel respon yang belum diamati. Sebelum digunakan sebagai alat prediksi, perlu dilakukan pengecekan apakah prediktor-prediktor yang terlibat berpengaruh signifikan terhadap respon. Permasalahan ini secara statistik dapat diselesaikan dengan metode inferensi statistik seperti uji hipotesis dan interval kepercayaan. Untuk melakukan inferensi, diperlukan distribusi sampling dari penduga kuadrat terkecil. Distribusi ini biasanya diturunkan dibawah asumsi bahwa y mengikuti distribusi normal. Namun, asumsi tersebut sering tidak tercapai dalam aplikasi nyata. Sehingga statistik yang diturunkan tidak bisa digunakan untuk inferensi. Dalam kondisi ini, metode asimtotik dapat menjadi solusi karena tidak memerlukan asumsi bahwa y harus mengikuti distribusi tertentu. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan distribusi limit dari penduga kuadrat terkecil yang dapat digunakan sebagai alat untuk melakukan inferensi terhadap parameter model regresi linear umum.

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi adalah teknik statistika yang digunakan untuk membangun model hubungan antara variabel independen (variabel prediktor) dengan variabel dependen (variabel respon). Hubungan tersebut berbentuk fungsi yang memetakan satu atau lebih variabel prediktor ke satu variabel respon (Yati dkk, 2013). Jika variabel respon dilambangkan dengan y dan variabel prediktor dilambangkan dengan x_0, x_1,⋯,x_p, maka fungsinya memetakan x_0, x_1,⋯,x_p ke y yang berbentuk $y = f(x_0, x_1, \cdots, x_p) + \varepsilon$, dimana f adalah fungsi regresi yang tidak diketahui dan ε adalah variabel kesalahan yang bersifat acak (Sayuti dkk, 2013).

Dalam fungsi regresi, terdapat parameter-parameter yang tidak diketahui yang akan menentukan model hubungan antara variabel independen dan variabel dependen. Parameter-parameter ini biasanya diperkirakan dengan teknik-teknik estimasi statistika, seperti metode kuadrat terkecil yang bertujuan untuk menemukan model yang paling sesuai dengan data yang diamati. Melalui proses ini, diperoleh model estimasi yang dapat digunakan sebagai alat untuk memprediksi variabel respon yang belum diamati (Risma dkk, 2020).

Penggunaan model estimasi sebagai alat prediksi secara serius sebaiknya dilengkapi dengan pemeriksaan terhadap kecukupan dari model tersebut. Misalkan awalnya diasumsikan x_0, x_1,⋯,x_p sebagai prediktor, jika terdapat suatu x_i untuk $i = 0,1, \cdots, p$, yang tidak berpengaruh terhadap variabel respon maka penggunaan model estimasi sebagai alat prediksi akan memberikan hasil yang kurang valid. Karena itu, sebaiknya dilakukan pengecekan terlebih dahulu apakah prediktor-prediktor yang terlibat berpengaruh signifikan terhadap variabel respon, sebelum menetapkan model tersebut sebagai alat prediksi secara permanen. Permasalahan ini secara statistik dapat diselesaikan dengan metode inferensi statistik seperti uji hipotesis dan interval kepercayaan (Somayasa, 2023).

Uji hipotesis dan interval kepercayaan digunakan untuk menentukan seberapa signifikan suatu variabel prediktor ada di dalam model. Dalam hal ini, uji hipotesis digunakan untuk menentukan apakah koefisien regresi suatu variabel prediktor adalah signifikan secara statistik, sedangkan interval kepercayaan memberikan perkiraan rentang nilai yang mungkin untuk parameter tersebut (Illowsky dan Dean, 2018).

Untuk melakukan inferensi, diperlukan distribusi sampling dari penduga kuadrat terkecil. Distribusi ini biasanya diturunkan dibawah asumsi bahwa y mengikuti distribusi normal, yang dikenal sebagai model regresi linear normal. Namun, asumsi tersebut sering tidak tercapai dalam aplikasi nyata. Sehingga statistik yang diturunkan tidak dapat digunakan untuk inferensi. Dalam kondisi ini, metode asimtotik dapat menjadi solusi karena tidak memerlukan asumsi bahwa y harus mengikuti distribusi tertentu (Wooldridge, 2016).

Metode asimtotik didasarkan pada teori asimtotik yang menyediakan pendekatan matematis untuk menggambarkan perilaku suatu penduga parameter ketika ukuran sampelnya mendekati tak hingga. Inferensi asimtotik melibatkan pendekatan distribusi sampling dari estimator dengan distribusi asimtotiknya, yang menjadi akurat seiring dengan bertambahnya ukuran sampel. Dalam konteks regresi linear umum, metode asimtotik dapat memberikan distribusi limit dari penduga kuadrat terkecil. Hal tersebut dilakukan dengan menerapkan teori-teori asimtotik (van der Vaart, 1998).

Makalah ini disusun dengan struktur sebegai berikut. Pada Bab 2 disajikan kajian pustaka yang memuat konsep-konsep dalam teori peluang dimensi tinggi yang diperlukan dalam mendapatkan distribusi limit dari kuantitas-kuantitas yang diperlukan. Hasil penelitian disajikan pada Bab 3. Selanjutnya makalah ini ditutup dengan kesimpulan dan saran yang dipresentasikan pada Bab 4.

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

2. KAJIAN PUSTAKA

Vektor acak adalah vektor yang komponen-komponennya adalah variabel acak. Biasanya, vektor acak dinotasikan dengan huruf kapital yang dicetak tebal (Johnson dan Wichern, 2007).

Definisi 2.4 (Seber dan Lee, 2003). Fungsi pembangkit momen (*Moment Generating Function*, disingkat MGF) dari suatu vektor acak $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \cdots, X_p\right)^{\mathrm{T}}$ dinotasikan dengan $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, yaitu suatu fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}^p$ dan mengambil nilai pada bilangan real tidak negatif $\mathbb{R}_{\geq 0}$, sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{t} = \left(t_1, t_2, \cdots, t_p\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$, nilai dari $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ adalah

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \coloneqq \mathbb{E}\left(exp\left\{\sum_{i=1}^{p} X_i t_i\right\}\right) = \mathbb{E}\left(exp\{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\}\right).$$

Definisi 2.5 (Seber dan Lee, 2003). Suatu vektor acak $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \cdots, X_p\right)^{\mathrm{T}}$ dikatakan berdistribusi normal multivariat dengan $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ dan $Cov(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$ (definit positif), jika $\mathbf{X}$ mempunyai fungsi densitas berbentuk:

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

dan fungsi pembangkit momen seperti yang diberikan oleh

$$M_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{t}) = exp\left\{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right\},$$

dimana $|\boldsymbol{\Sigma}|$ adalah determinan dari $\boldsymbol{\Sigma}$. Selanjutnya dinotasikan dengan $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Teorema 2.1 (Seber dan Lee, 2003). Jika $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{A}$ adalah matriks real berukuran $n \times p$, dan $\mathbf{b}$ adalah sembarang vektor real di $\mathbb{R}^n$, maka berlaku:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{b} \sim N_n(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

2.1 DIFERENSIAL VEKTOR DAN MATRIKS

1. Misalkan $u = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ adalah fungsi linear berderajat satu dimana $\boldsymbol{a} = \left(a_1, a_2, \dots, a_p\right)^{\mathrm{T}}$, dan $\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)^{\mathrm{T}}$, dengan $a_1, a_2, \dots, a_p$ adalah konstanta dan $x_1, x_2, \dots, x_p$ adalah variabel skalar. Maka turunan u terhadap vektor $\boldsymbol{x}$ adalah:
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}. \tag{2.1}$$
2. Misalkan $v = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ adalah bentuk kuadratik (*quadratic form*), dimana $\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)^{\mathrm{T}}$ dan $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$, dengan $x_1, x_2, \dots, x_p$ adalah variabel skalar real dan a_{ij} $(i, j = 1,2, \dots, p)$ adalah konstanta. Maka turunan v terhadap vektor $\boldsymbol{x}$ adalah:
$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{A}^{T}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x} \\ 2\mathbf{A}\boldsymbol{x}, \qquad jika\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{cases}. \tag{2.2}$$

2.2 KONVERGENSI BARISAN VEKTOR ACAK

Definisi 2.12 (Feller, 1971). Misalkan $(\mathbf{X}_n)_{n\geq 1}$ dan $F_{\mathbf{X}_n}(\boldsymbol{x})$ masing-masing adalah barisan vektor acak dan barisan fungsi distribusi kumulatif yang bersesuaian. Barisan $(\mathbf{X}_n)_{n\geq 1}$ dikatakan konvergen dalam distribusi ke suatu vektor acak $\boldsymbol{X}$, yang dinotasikan dengan $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$, jika

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mathbf{X}_n}(\boldsymbol{x}) = F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) \text{ untuk semua } \boldsymbol{x},$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

dimana $F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari **X**.

Definisi 2.13 (Feller, 1971). Barisan vektor acak $(\mathbf{X}_n)_{n\geq1}$ dikatakan konvergen dalam probabilitas ke **X**, yang dinotasikan dengan $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}$, jika

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\| \geq \varepsilon) = 0,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Teorema 2.2 (Teorema Limit Pusat Multivariat Lindberg-Feller (Greene, 2003)). Misalkan $(\mathbf{X}_n)_{n\geq1}$ merupakan barisan vektor acak berdimensi p yang saling bebas dengan $\mathbb{E}(\mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^p$ dan $Cov(\mathbf{X}_i) = \boldsymbol{Q}_i \in \mathbb{R}^{p\times p}, \forall i = 1,2,\cdots,n$. Jika $\overline{\boldsymbol{\mu}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i$ dan $\overline{\boldsymbol{Q}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_i$ yang diasumsikan bahwa untuk $n \to \infty$

$$\overline{\boldsymbol{Q}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{Q},$$

dimana $\boldsymbol{Q}$ adalah suatu matriks yang bersifat positif definit dan elemen-elemennya berhingga, dan $\forall i = 1,2,..,n$,

$$\lim_{n\to\infty}(n\overline{\boldsymbol{Q}}_n)^{-1}\boldsymbol{Q}_i = \lim_{n\to\infty}(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_i)^{-1}\boldsymbol{Q}_i = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p\times p},$$

maka berlaku

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}}_n - \overline{\boldsymbol{\mu}}_n) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}).$$

Teorema 2.3 (*Weak Law of Large Number* (Somayasa, 2019)). Jika $(X_n)_{n\geq1}$ adalah barisan sampel acak dari populasi tertentu dengan $E(X_i) = \mu$ dan $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $\forall\, i = 1,2,\dots,n$. Maka untuk n yang sangat besar barisan rata-rata sampel konvergen dalam probabilitas ke rata-rata populasi, yaitu $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Teorema 2.4 (Teorema Pemetaan Kontinu (Shao, 2003)). Misalkan $(\mathbf{X}_n)_{n\geq1}$ adalah barisan vektor acak berdimensi p yang terdefinisikan pada ruang probabilitas, dan $f:\ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ adalah fungsi kontinu, maka untuk $n \to \infty$ berlaku:

1. $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}$ maka $f(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{P} f(\mathbf{X})$.
2. $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} X$ maka $f(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{D} f(\mathbf{X})$.

Teorema 2.5 (Teorema Slutsky (van der Vaart, 1998)). Misalkan $(\mathbf{X}_n)_{n\geq1}$ dan $(\mathbf{Y}_n)_{n\geq1}$ adalah barisan vektor acak. Jika $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{a}$, dimana **X** adalah suatu variabel acak dan $\boldsymbol{a}$ adalah suatu vektor konstan, maka berlaku

1. $\mathbf{X}_n + \mathbf{Y}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X} + \boldsymbol{a}$.
2. $\mathbf{Y}_n\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \boldsymbol{a}\mathbf{X}$.
3. $\mathbf{Y}_n^{-1}\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \boldsymbol{a}^{-1}\mathbf{X}$, untuk $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$.

Catatan: Pada bagian 2 dan bagian 3, Y_n adalah barisan matriks yang konvergen dalam probabilitas ke suatu matriks $\boldsymbol{a}$ yang elemen-elemennya berhingga dan bersifat positif definit.

Teorema 2.6 (van der Vaart, 1998). Misalkan $(\mathbf{X}_n)_{n\geq1}$ dan $(\mathbf{Y}_n)_{n\geq1}$ adalah barisan vektor acak, dan **X** adalah suatu vektor acak, maka

1. $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \boldsymbol{a}$, dimana $\boldsymbol{a}$ adalah suatu vektor konstan.
2. $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{a} \Rightarrow (\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \xrightarrow{D} (\mathbf{X}, \boldsymbol{a})$, dimana $\boldsymbol{a}$ adalah suatu vektor konstan.
3. $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{P} \mathbf{Y} \Rightarrow (\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \xrightarrow{P} (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

2.3 REGRESI LINEAR BERGANDA

Definisi 2.6 (Somayasa, 2023). Model regresi linear berganda adalah model regresi yang berbentuk

$$Y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2.3}$$

dimana ε_i adalah variabel kesalahan (*error*) yang diasumsikan saling bebas dan berdistribusi identik dengan $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ dan $var(\varepsilon_i) = \sigma^2$, dengan $0 \leq \sigma^2 \leq \infty$ merupakan parameter yang tidak diketahui, Y_i adalah variabel respon yang teramati pada pengamatan yang ke$-i$, lalu $x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{ip}$ mewakili nilai-nilai dari variabel bebas (prediktor) pada pengamatan yang ke$-i$ yang dapat dikontrol atau diukur dengan kesalahan yang dapat diabaikan, dan $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$adalah parameter-parameter yang tidak diketahui yang bernilai konstan dari pengamatan satu ke pengamatan yang lainnya. Kata linear mengacu pada bentuk dari parameter $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ yang muncul dalam bentuk pangkat dari satu.

Model (2.3) juga dapat dipresentasikan dalam suatu bentuk yang melibatkan perkalian matriks. Jika n pengamatan terhadap variabel respon dikumpulkan dalam bentuk vektor, maka diperoleh model berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.4}$$

dimana $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$ adalah vektor kesalahan (*error*), $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^{\mathrm{T}}$ adalah vektor respon, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui, dan

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdots\cdots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & \cdots\cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots\cdots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

adalah matriks konstan berukuran $n \times (p+1)$ yang disebut matriks model yang dikonstruksikan dengan cara sedemikian hingga kolom-kolom dari **X** saling bebas linear, dengan kata lain $rank(\mathbf{X}) = p + 1$.

Adapun model polinomial berderajat k dengan p variabel bebas dapat dipandang sebagai kasus khusus dari model linear berganda. Sebagai contoh, misalkan $k = 1$, maka model polinomial berderajat 1 untuk regresi linear berganda dengan p variabel bebas didefinisikan sebagai:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ip}, \;\; i = 1,2,\cdots,n.$$

Contoh lain adalah jika diberikan $k = 2$ dan $p = 2$, maka model polinomial berderajat dua dengan dua variabel bebas didefinisikan sebagai:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i1}^2 + \beta_4 x_{i2}^2 + \beta_5 x_{i1} x_{i2}, \;\; i = 1,2,\cdots,n.$$

Penduga kuadrat terkecil adalah penduga yang diperoleh dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Metode tersebut bertujuan meminimumkan jumlah kuadrat dari variabel kesalahan. Misalkan penduga kuadrat terkecil untuk $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah statistik yang meminimumkan kuantitas berikut:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)^2.$$

(Bain dan Engelhardt, 1992)

Definisi 2.9 (Somayasa, 2023). Vektor residual untuk Model (2.4) didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{r} \coloneqq \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}. \tag{2.5}$$

Jumlah kuadrat dari residual (*residual sum of square*, disingkat RSS) didefinisikan sebagai:

$$RSS \coloneqq \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{r} = \|\boldsymbol{r}\|^2. \tag{2.6}$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model regresi linear umum asimtotik didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_n\ , (n \geq 1) \tag{3.1}$$

dimana $\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ adalah barisan vektor observasi, $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_0, \beta_1, \dots \beta_p\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p+1}$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui, $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ adalah barisan vektor kesalahan yang semua komponennya diasumsikan saling bebas dan berdistribusi identik dengan $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{0}$ dan $cov(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \sigma^2\mathbf{I}_n$, $0 \leq \sigma^2 \leq \infty$, dan

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

adalah matriks rancangan berukuran $n \times (p+1)$ yang dikonstruksikan dengan cara sedemikian hingga $rank(\mathbf{X}_n) = p + 1$. Kolom-kolom dari $\mathbf{X}_n$ merupakan basis untuk suatu ruang bagian dari $\mathbb{R}^n$. Sebagai akibat dari $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{n}) = \mathbf{0}$ dan $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \sigma^2\mathbf{I}_n$, maka $\mathbb{E}(\mathbf{Y}_n) = \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta}$ dan $\mathrm{cov}(\mathbf{Y}_n) = \sigma^2\mathbf{I}_n$.

3.1 PENDUGA UNTUK VEKTOR $\boldsymbol{\beta}$

Karena distribusi dari $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ tidak diketahui, maka untuk mengestimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ dapat digunakan metode kuadrat terkecil. Metode ini berupaya menentukan penduga untuk $\boldsymbol{\beta}$ yang meminimumkan jumlah kuadrat dari variabel kesalahannya. Dari Model (3.1), diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta}).$$

Misalkan penduga kuadrat terkecil dinyatakan dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$ adalah nilai-nilai dari vektor $\boldsymbol{\beta}$ yang meminimumkan fungsi $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2$. Dengan kata lain $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$ adalah vektor yang memenuhi

$$\mathcal{L}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}).$$

Maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$ dapat diperoleh dari penyelesaian sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \frac{\partial\left((\mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial\left(\mathbf{Y}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_n{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n + (\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}. \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial\left(\mathbf{Y}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n - 2(\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial\left(\mathbf{Y}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n - 2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dengan menerapkan rumus diferensial terhadap vektor yang diberikan pada Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) terhadap Persamaan (3.2), diperoleh

$$-2\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n + 2\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n.$$

Karena $\boldsymbol{X}_n$ memiliki *rank* kolom penuh yaitu $p + 1$, maka terdapat invers dari matriks ($\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n$), sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n.$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

Dengan demikian,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n = \left(\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n \tag{3.3}$$

3.2 NORMAL ASIMTOTIK UNTUK PENDUGA KUADRAT TERKECIL

Untuk menentukan distribusi limit dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$, perlu diberikan beberapa asumsi tambahan terhadap Model (3.1), yaitu:

Asumsi 1: Barisan rata-rata sampel dari barisan $\left(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)$ konvergen dalam probabilitas ke rata-rata populasinya, yang secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}) \xrightarrow{P} \mathbf{C},$$

dimana $\mathbf{C} \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)$.

Asumsi 2: Matriks $\mathbf{C}$ adalah matriks yang elemen-elemennya berhingga dan bersifat positif definit.

Asumsi 3: Untuk $i = 1,2,\dots,n$, $(\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i)$ adalah barisan vektor acak yang saling bebas.

Asumsi 4: Untuk $n \to \infty$, berlaku

$$\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

Teorema 3.1 Dibawah Asumsi 1, untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta}.$$

Bukti. Dari Persamaan (3.3), diperoleh

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n &= \left(\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_n)\\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i\right).\end{aligned}$$

Karena $\mathbb{E}(\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i) = \mathbf{0}$, maka dengan menerapkan Teorema 2.3 pada barisan $(\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i)$, diperoleh $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i \xrightarrow{P} \mathbf{0}$, dan dengan menerapkan Teorema 2.4 pada Asumsi 1, maka $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{T}\right)^{-1} \xrightarrow{P} \mathbf{C}^{-1}$. Sehingga dengan menerapkan Teorema 2.6 bagian 3, untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\boldsymbol{\beta} + \left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i\right) \xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{C}^{-1}\mathbf{0} = \boldsymbol{\beta}.$$

Dengan demikian, untuk $n \to \infty$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2 Dibawah Asumsi 1, Asumsi 2, dan Asumsi 4, untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\hat{\sigma}_n^2 \coloneqq \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}r_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

Bukti. Dari Persamaan (2.6), diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)\right)^2\end{aligned}$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(Y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^2 + 2\left(Y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right) + \left(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right) + \left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)$$

Sebagai akibat dari Teorema 3.1, maka $\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right) \xrightarrow{P} \boldsymbol{0}$. Sehingga dibawah Asumsi 4 dan dengan menerapkan Teorema 2.6, untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right) + \left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right) \xrightarrow{P} \sigma^2. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.3 Dibawah Asumsi 1, Asumsi 2, dan Asumsi 3, untuk $n \to \infty$ berlaku:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}^{-1}).$$

Bukti. Dari Persamaan (3.1) dan Persamaan (3.5), diperoleh

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right) &= \sqrt{n}\left[\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_n - \boldsymbol{\beta}\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\beta}\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i\right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Misalkan $\overline{\boldsymbol{d}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{d}_i \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i$, maka dari Persamaan (3.4) diperoleh

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{d}}).$$

Karena $Cov(\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i) = \sigma^2\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$, maka $Cov(\overline{\boldsymbol{d}}) = Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Cov(\boldsymbol{x}_i\varepsilon_i) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)$. Sehingga dibawah Asumsi 1 diperoleh

$$Cov(\overline{\boldsymbol{d}}) \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sigma^2\boldsymbol{C}.$$

Dengan menerapkan teorema Limit Pusat Multivariat Lindberg-Feller (Teorema 2.2) pada $\overline{\boldsymbol{d}}$ diperoleh

$$\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{d}}) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}).$$

Karena $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right) \xrightarrow{P} \boldsymbol{C}$, maka dengan menerapkan Teorema 2.4, diperoleh $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \xrightarrow{P} \boldsymbol{C}^{-1}$. Sehingga dengan menerapkan Teorema 2.5 bagian 3 pada Persamaan (3.4) diperoleh

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{d}}) \xrightarrow{D} \boldsymbol{C}^{-1}\cdot N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}).$$

Berdasarkan Teorema 2.1 berlaku $\boldsymbol{C}^{-1}\cdot N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}) \sim N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1}) = N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}^{-1})$, maka

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{d}}) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{C}^{-1}).$$

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

Dengan demikian

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{C}^{-1}). \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.4 Jika $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$ adalah barisan penduga untuk vektor $\boldsymbol{\beta}$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

1. $\frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})}{\widehat{\sigma}_n^2} \xrightarrow{D} \mathcal{X}^2(p+1).$
2. $\frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\widehat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}} \xrightarrow{D} N(0,1), \forall\, i = 0,1,\dots,p,$

   dimana $\boldsymbol{l}_{i+1}$ adalah vektor pada $\mathbb{R}^{p+1}$ sedemikian hingga komponen ke$-(i+1)$ adalah satu dan komponen-komponen yang lain adalah nol.

Bukti.

1. Pada bagian satu akan ditunjukkan dengan melakukan transformasi dari hasil pada Teorema 3.3, yaitu

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{C}^{-1})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C}^{1/2}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{C}^{1/2}\, \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}^{1/2}\right),$$

dimana $\boldsymbol{C}^{1/2}$ adalah matriks simetris berukuran $(p+1) \times (p+1)$ yang memenuhi sifat $\boldsymbol{C}^{1/2}\,\boldsymbol{C}^{1/2} = \boldsymbol{C}$ dan mempunyai invers $\left(\boldsymbol{C}^{-1/2}\right) = \left(\boldsymbol{C}^{1/2}\right)^{-1}$, maka

$$\boldsymbol{C}^{1/2}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{C}^{-1/2}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}^{1/2}\right) = N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p+1}\right).$$

Dengan menerapkan Teorema 2.4 pada Asumsi 1 dan hasil dari Teorema 3.2, diperoleh $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2} \xrightarrow{P} \boldsymbol{C}^{1/2}$ dan $\widehat{\sigma}_n \xrightarrow{P} \sigma$. Maka dengan mengestimasi $\boldsymbol{C}^{1/2}$ dengan $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}$ dan σ dengan $\widehat{\sigma}_n$ pada kuantitas diatas, diperoleh

$$\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\frac{\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}_n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) = \left[\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\boldsymbol{C}^{-1/2}\right]\boldsymbol{C}^{1/2}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_n}.$$

Karena $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2} \xrightarrow{P} \boldsymbol{C}^{1/2}$, $\boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p+1}\right)$, dan $\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow{P} 1$, maka dengan menerapkan Teorema 2.5 bagian 2 pada kuantitas diatas, diperoleh

$$\left[\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\boldsymbol{C}^{-1/2}\right]\boldsymbol{C}^{1/2}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow{D} \boldsymbol{C}^{1/2}\,\boldsymbol{C}^{-1/2}\,N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p+1}\right)\cdot 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\frac{\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}_n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p+1}\right).$$

Karena $\|.\|$ merupakan pemetaan kontinu, maka dengan menerapkan Teorema 2.4 pada rumus terakhir, diperoleh

$$\left\|\frac{\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})}{\widehat{\sigma}_n}\right\|^2 \xrightarrow{D} \left\|N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p+1}\right)\right\|^2.$$

Jika didefinisikan suatu vektor acak $\boldsymbol{z} = \left(z_0, z_1, \cdots, z_p\right)^{\mathrm{T}}$, dimana $\boldsymbol{z} \sim N_{p+1}\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p+1}\right)$, maka dari rumus terakhir diperoleh

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxxx

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}_n}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{1/2}\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}_n}\right)\xrightarrow{D}\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}_n^2}\xrightarrow{D}\sum_{i=0}^{p}z_i^2.$$

Karena $\boldsymbol{z}\sim N_{p+1}(\mathbf{0},\mathbf{I}_{p+1})$, artinya untuk setiap komponen $\boldsymbol{z}$ bersifat saling bebas dan mengikuti distribusi $N(0,1)$, maka dengan menerapkan prinsip ketunggalan MGF diperoleh $\sum_{i=0}^{p} z_i^2 \sim \mathcal{X}^2(p+1)$. Dengan demikian, untuk $n\to\infty$ berlaku:

$$\frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}_n^2}\xrightarrow{D}\mathcal{X}^2(p+1).$$ ■

2. Sama seperti pada bagian satu, bagian dua juga dapat ditunjukkan dengan melakukan transformasi dari hasil pada Teorema 3.3, yaitu

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n-\boldsymbol{\beta})\xrightarrow{D}N_{p+1}(\mathbf{0},\sigma^2\boldsymbol{C}^{-1})$$
$$\Rightarrow \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\xrightarrow{D}N_{p+1}\left(\boldsymbol{\beta},\frac{1}{n}\sigma^2\boldsymbol{C}^{-1}\right).$$

Dengan menerapkan Teorema 2.2 pada kuantitas diatas, diperoleh

$$\Rightarrow \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\xrightarrow{D}N\left(\boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta},\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}\right)$$
$$\Rightarrow \hat{\beta}_i\xrightarrow{D}N\left(\beta_i,\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}\right),$$
$$\Rightarrow \frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\xrightarrow{D}N(0,1).$$

Selanjutnya, dengan mengestimasi σ^2 dengan $\hat{\sigma}_n^2$ dan $\boldsymbol{C}^{-1}$ dengan $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}$, diperoleh

$$\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}_n^T\boldsymbol{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\Bigg/\frac{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}_n^T\boldsymbol{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}$$

$$=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}(\boldsymbol{X}_n^T\boldsymbol{X}_n)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\xrightarrow{D}N(0,1)\cdot\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2\boldsymbol{l}_{i+1}^{T}(\boldsymbol{X}_n^T\boldsymbol{X}_n)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\xrightarrow{D}N(0,1).$$ ■

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

3.3 UJI HIPOTESIS ASIMTOTIK TENTANG VEKTOR $\boldsymbol{\beta}$

Penerapan analisis regresi linear umum harus dilengkapi dengan pemeriksaan terhadap kecukupan dari model estimasi sebelum digunakan sebagai alat prediksi secara permanen. Misalkan model yang diasumsikan melibatkan $x_0, x_1, \cdots, x_p$ sebagai prediktor. Maka sebelum digunakan sebagai alat prediksi, perlu dicek terlebih dahulu apakah terdapat x_i, untuk $i = 0,1,\cdots,p$ yang tidak berpengaruh terhadap respon. Permasalahan ini secara statistik dapat di letakkan sebagai permasalahan uji terhadap hipotesis berikut:

$$H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \text{ lawan } \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}.$$

Untuk menentukan statistik uji hipotesis diatas, dapat diturunkan dari uji hipotesis yang lebih umum yaitu

$$H_0 : \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \text{ lawan } \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_0,$$

dimana $\boldsymbol{\beta}_0$ adalah sembarang vektor konstan pada $\mathbb{R}^{p+1}$ yang diberikan. Statistik uji yang digunakan dapat didasarkan pada kuantitas pivot untuk $\boldsymbol{\beta}$ yang telah diturunkan pada Teorema 4.4 bagian 1, yaitu

$$\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \xrightarrow{D} \mathcal{X}^2(p+1).$$

Oleh karena itu uji hipotesis asimtotik akan menolak H_0 pada tingkat signifikansi α, jika

$$\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq c,$$

dimana c adalah suatu konstanta yang ditentukan dari persamaan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Kesalahan\ tipe\ I\} = \alpha &\Leftrightarrow \mathbb{P}\{Tolak\ H_0 \mid H_0\ benar\} = \alpha \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq c \mid \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0\right\} = \alpha \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq c\right\} = \alpha.\end{aligned}$$

Dibawah situasi H_0, untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \xrightarrow{D} \mathcal{X}^2(p+1).$$

Sehingga diperoleh

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq c\right\} \to \mathbb{P}\{\mathcal{X}^2(p+1) \geq c\}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq c\right\} \approx \mathbb{P}\{\mathcal{X}^2(p+1) \geq c\}.$$

Jadi dengan memilih $c = \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)$, dimana $\mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)$ merupakan kuantil bawah ke$-(1-\alpha)$ dari distribusi $\mathcal{X}^2(p+1)$, maka

$$\mathbb{P}\{\mathcal{X}^2(p+1) \geq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)\} = \alpha \ \Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)\right\} \approx \alpha.$$

Dengan demikian, H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α secara asimtotik jika dan hanya jika

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$K_n \coloneqq \frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \geq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1).$$

3.4 UJI PARSIAL ASIMTOTIK UNTUK KOMPONEN VEKTOR $\boldsymbol{\beta}$

Jika uji chi-kuadrat untuk hipotesis $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ berakhir pada keputusan menolak H_0 pada tingkat signifikansi α, maka artinya terdapat sekurang-kurangnya satu $i \in \{1,2,\dots,p\}$, sedemikian hingga $\beta_i \neq 0$. Untuk mengecek apakah $\beta_i \neq 0$ untuk suatu i, perlu dilakukan uji terhadap hipotesis berikut:

$$H_0 : \beta_i = 0 \text{ lawan } H_1 : \beta_i \neq 0.$$

Statistik uji yang digunakan dapat didasarkan pada kuantitas pivot untuk β_i yang telah diturunkan pada Teorema 3.4 bagian 2, yaitu

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad i = 0,1,\dots,p,$$

dimana $\boldsymbol{l}_{i+1}$adalah vektor kolom berdimensi $p+1$ yang komponen ke$-(i+1)$ adalah satu, sedangkan komponen lainnya adalah nol.

Oleh karena itu, uji hipotesis hampiran akan menolak H_0 pada tingkat signifikansi α, jika

$$\left|\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\right| \geq c,$$

dimana c adalah konstanta yang ditentukan dari persamaan

$$\mathbb{P}\{Kesalahan\ tipe\ I\} = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}\{Tolak\ H_0 \mid H_0\ benar\}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\left|\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}}\right| \geq c \mid \beta_i = 0\right\} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}} \leq -c\right\} + \mathbb{P}\left\{\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}} \geq c\right\} = \alpha.$$

Jika H_0 benar, maka $Z_i \coloneqq \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1}\boldsymbol{l}_{i+1}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$. Sehingga diperoleh

$$\mathbb{P}\{Z_i \leq -c\} + \mathbb{P}\{Z_i \geq c\} \to \mathbb{P}\{Z \leq -c\} + \mathbb{P}\{Z \geq c\}$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\{Z_i \leq -c\} + \mathbb{P}\{Z_i \geq c\} \approx \mathbb{P}\{Z \leq -c\} + \mathbb{P}\{Z \geq c\}.$$

Jadi dengan memilih $c^* = Z_{1-\alpha/2}$, dimana $Z_{1-\alpha/2}$ adalah kuantil bawah ke $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ dari distribusi $N(0,1)$, maka

$$\mathbb{P}\left\{Z \leq -\left(Z_{1-\alpha/2}\right)\right\} + \mathbb{P}\left\{Z \geq Z_{1-\alpha/2}\right\} = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{Z_i \leq -\left(Z_{1-\alpha/2}\right)\right\} + \mathbb{P}\left\{Z_i \geq Z_{1-\alpha/2}\right\} \approx \alpha$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{Z_i \leq Z_{\alpha/2}\right\} + \mathbb{P}\left\{Z_i \geq Z_{1-\alpha/2}\right\} \approx \alpha.$$

Dengan demikian, H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α secara asimtotik jika dan hanya jika

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$Z_i := \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}} \leq Z\alpha_{/2} \text{ atau } Z_i := \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}} \geq Z_{1-\alpha/2},$$

atau setara dengan $|Z_i| \geq z_{1-\alpha/2}$.

3.5 DAERAH KEPERCAAAN ASIMTOTIK UNTUK VEKTOR $\boldsymbol{\beta}$

Daerah kepercayaan asimtotik dapat dikonstruksi menggunakan metode kuantitas pivot melalui barisan K_n, dimana untuk n yang semakin besar, $K_n \xrightarrow{D} \mathcal{X}^2(p+1)$. Jika $\mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)$ didefinisikan sebagai kuantil bawah ke $(1-\alpha)$ dari distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas p +1, maka berlaku:

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \leq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)\right\} \approx \mathbb{P}\{\mathcal{X}^2(\mathrm{p}+1) \leq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1\} = 1-\alpha.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \leq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)\right\} \approx 1-\alpha.$$

Maka daerah kepercayaan asimtotik $(1-\alpha)100\%$ untuk vektor $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\beta}) = \left\{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1} \left| \frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \leq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1)\right.\right\}.$$

3.6 SELANG KEPERCAYAAN ASIMTOTIK UNTUK KOMPONEN VEKTOR $\boldsymbol{\beta}$

Selang kepercayaan parsial untuk komponen vektor $\boldsymbol{\beta}$ dikonstruksi melalui barisan kuantitas pivot Z_i, dimana untuk n yang semakin besar, $Z_i \xrightarrow{D} N(0,1)$. Sehingga jika didefinisikan kuantil bawah ke $\alpha/2$ dan ke $\left(1-\alpha/2\right)$ dari distribusi normal baku berturut-turut adalah $Z\alpha_{/2}$ dan $Z_{(1-\alpha/2)}$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku:

$$\mathbb{P}\left\{Z\alpha_{/2} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}} \leq Z_{1-\alpha/2}\right\} \approx \mathbb{P}\left\{Z\alpha_{/2} \leq Z \leq Z_{(1-\alpha/2)}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left\{Z\alpha_{/2} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}} \leq Z_{1-\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left\{\hat{\beta}_i - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i - Z\alpha_{/2}\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}\right\} \approx 1-\alpha.$$

Jadi, selang kepercayaan asimtotik $(1-\alpha)100\%$ untuk komponen vektor $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut:

$$\left(\hat{\beta}_i - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}, \quad \hat{\beta}_i - Z\alpha_{/2}\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}\right), i = 0,1,\cdots,p. \tag{3.5}$$

3.7 CONTOH PENERAPAN

Pada bagian ini akan dibahas contoh penerapan inferensi asimtotik parameter model regresi linear umum pada bidang pertanian. Data yang digunakan adalah data produksi padi di Desa Lipumasagena Kabupaten

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

Konawe Selatan Tahun 2019. Data tersebut terdiri dari 60 hasil pencatatan terhadap y kuintal hasil panen padi yang teramati pada sawah dengan luas lahan x_1 hektar dan jumlah tenaga kerja sebanyak x_2.

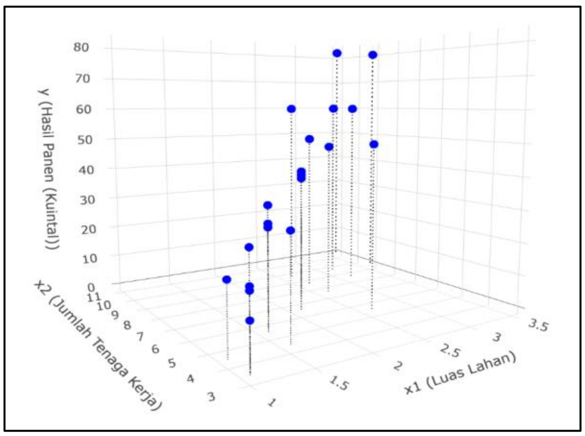
Tabel 4.1 Data Produksi Padi di Desa Lipumasagena Konawe Selatan

No.	Hasil Panen (Y Kuintal)	Luas Lahan (x_1 ha)	Jumlah Tenaga Kerja (x_2)
1	20	1	3
2	13	1	3
3	40	2	6
4	21	1	3
5	40	2	6
6	41	2	6
7	20	1	3
8	60	3	8
9	42	2	6
10	30	1,5	4
11	50	2,5	5
12	20	1	3
13	40	2	6
14	50	2,5	8
15	40	2	6
16	35	1,5	5
17	40	2	6
18	30	1,5	5
19	60	2,5	9
20	80	3,5	9
21	20	1	4
22	50	2,5	8
23	20	1	3
24	40	2	6
25	82	3,5	11
26	30	1,5	5
27	40	2	6
28	60	3	9
29	48	2,5	7
30	29	1,5	5
31	29	1,5	5
32	48	2,5	7
33	60	3	9
34	40	2	6
35	30	1,5	5
36	82	3,5	11
37	40	2	6

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxxx

38	20	1	3
39	50	2,5	8
40	20	1	4
41	80	3,5	9
42	60	2,5	9
43	30	1,5	5
44	40	2	6
45	35	1,5	5
46	40	2	6
47	50	2,5	8
48	40	2	6
49	20	1	3
50	50	2,5	5
51	30	1,5	4
52	42	2	6
53	60	3	8
54	20	1	3
55	41	2	6
56	40	2	6
57	21	1	3
58	40	2	6
59	13	1	3
60	30	1	3

Sumber: *Skripsi Arby Izulkarnaen , 2020.*



Gambar 3.1 *Scatter-Plot* Data Produksi Padi

Grafik (*scatter plot*) dari data pada Tabel 3.1 dikonstruksikan dengan *software* R yang dipresentasikan pada Gambar 3.1 Dapat dilihat bahwa terdapat kecenderungan hasil produksi padi dipengaruhi oleh luas lahan dan jumlah tenaga kerja secara non-linear. Berdasarkan informasi tersebut, maka model yang diasumsikan adalah model polinom berderajat dua dengan dua variabel bebas, yaitu

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 + \varepsilon.$$

Model polinom derajat dua dipilih karena dapat menginterpretasikan hubungan yang lebih kompleks antara variabel-variabel prediktor dan variabel respon dibandingkan dengan model derajat satu. Dengan memasukkan suku kuadrat dan suku interaksi dari variabel-variabel prediktor, model ini dapat mengakomodasi efek non-linear dan interaksi yang mungkin ada dalam data.

Perhitungan terhadap penduga kuadrat terkecil dan kuantitas-kuantitas lainnya yang berhubungan dengan model dan data tersebut dilakukan dengan *software* R. Dari hasil perhitungan diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n = \left(\hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3 \quad \hat{\beta}_4 \quad \hat{\beta}_5\right)^T = (6{,}2094 \quad 7{,}9761 \quad 1{,}0505 \quad 10{,}6244 \quad 1{,}0925 \quad -5.9052)^T$ dan $\hat{\sigma}_n^2 = 7{,}1063$. Sehingga model estimasi yang dihasilkan adalah

$$\hat{Y} = 6{,}2094 + 7{,}9761 x_1 + 1{,}0505 x_2 + 10{,}6244 x_1^2 + 1{,}0925 x_2^2 - 5{,}9052 x_1 x_2. \tag{3.6}$$

Selanjutnya akan dilakukan pengecekkan apakah *intercept*, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, dan $x_1 x_2$ pada model diatas memberikan pengaruh signifikan terhadap variabel respon. Pemeriksaan dilakukan dengan menerapkan uji chi-kuadrat terhadap hipotesis $H_0: \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \quad lawan \quad H_1: \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. Dibawah H_0, nilai statistik uji K_n adalah

$$\frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^T \left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_n\right) \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n}{\hat{\sigma}_n^2} = 15700{,}3900.$$

Misalkan $\alpha = 0{,}05$, maka untuk $p = 5$, nilai dari $\mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1) = 12{,}5916$, maka $H_0: \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ditolak.

Karena uji ini berakhir pada keputusan menolak H_0, maka artinya terdapat sekurang-kurangnya satu $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$, sedemikian hingga $\beta_i \neq 0$. Untuk mengecek apakah $\beta_i \neq 0$ untuk suatu i, maka perlu dilakukan uji terhadap hipotesis $H_0: \beta_i = 0$ dengan menerapkan uji Z asimtotik yang telah diturunkan sebelumnya. Uji parsial untuk $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_5$ pada tingkat signifikansi $\alpha = 0{,}05$ disajikan pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.2 Uji Parsial Asimtotik Berdasarkan Model 3.6

No.	Hipotesis	Statistik Uji $\left(\dfrac{\beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^T (\boldsymbol{X}_n^T \boldsymbol{X}_n)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}}\right)$	Keputusan (Tolak H_0 jika $\lvert Z_i \rvert > Z_{0,975} = 1{,}9600$)
1.	$H_0: \beta_0 = 0$ lawan $H_1: \beta_0 \neq 0$	$Z_0 = 2{,}4429$	Tolak H_0
2.	$H_0: \beta_1 = 0$ lawan $H_1: \beta_1 \neq 0$	$Z_1 = 1{,}2711$	Tidak tolak H_0
3.	$H_0: \beta_2 = 0$ lawan $H_1: \beta_2 \neq 0$	$Z_2 = 0{,}4868$	Tidak tolak H_0
4.	$H_0: \beta_3 = 0$ lawan $H_1: \beta_3 \neq 0$	$Z_3 = 2{,}9457$	Tolak H_0
5.	$H_0: \beta_4 = 0$ lawan $H_1: \beta_4 \neq 0$	$Z_4 = 2{,}9536$	Tolak H_0
6.	$H_0: \beta_5 = 0$ lawan $H_1: \beta_5 \neq 0$	$Z_5 = 2{,}7408$	Tolak H_0

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

Dapat dilihat bahwa uji untuk β_1 dan β_2 menghasilkan keputusan tidak tolak H_0, yang artinya prediktor x_1 dan x_2 pada Model (3.6) tidak berpengaruh signifikan terhadap respon.

Uji terhadap kecukupan model juga dapat dilakukan dengan mengonstruksi selang kepercayaan parsial untuk setiap komponen $\boldsymbol{\beta}$. Berdasarkan Rumus (3.5) diperoleh selang kepercayaan asimtotik 95% untuk β_0, β_1, β_2, β_3, β_4, dan β_5 berturut-turut yaitu $(1{,}2276\ ,\ 11{,}1912)$, $(-4{,}3226\ ,\ 20{,}2749)$, $(-3{,}1792\ ,\ 5{,}2802)$, $(3{,}5553\ ,\ 17{,}6935)$, $(0{,}3675\ ,\ 1{,}8174)$, dan $(-10{,}1281\ ,\ -1{,}6824)$. Melalui cara ini, juga menunjukkan hal yang sama, yaitu pada selang kepercayaan untuk β_1 dan β_2 memuat angka nol, yang artinya prediktor x_1 dan x_2 pada Model (3.6) tidak berpengaruh signifikan terhadap respon.

Jadi, berdasarkan uji hipotesis dan selang kepercayaan untuk $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_5$, Model (3.6) tidak teruji cukup. Oleh karena itu, data pada Tabel 3.1 akan dicocokkan kembali dengan model polinom derajat dua yang tidak melibatkan x_1 dan x_2. Model yang diasumsikan yaitu

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_3 x_1 x_2 + \varepsilon,$$

dimana penduga kuadrat terkecil dan kuantitas lainnya untuk model tersebut adalah $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n = \left(\hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3\right)^{\mathrm{T}} = (16{,}7483 \quad 13{,}3434 \quad 1{,}2980 \quad -6{,}5721)^{\mathrm{T}}$ dan $\hat{\sigma}_n^2 = 9{,}3685$. Maka model estimasi yang dihasilkan adalah

$$\hat{Y} = 16{,}7483 + 13{,}3434 x_1^2 + 1{,}2980 x_2^2 - 6{,}5721 x_1 x_2. \tag{3.7}$$

Uji chi-kuadrat untuk mengecek apakah *intercept*, x_1^2, x_2^2, dan $x_1 x_2$ berpengaruh signifikan terhadap variabel respon memberikan nilai dari statistik uji chi-kuadrat yaitu $K_n = 11894{,}6700$ yang menghasilkan keputusan tolak $H_0\colon \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ pada tingkat signifikansi $\alpha = 0{,}05$. Artinya, terdapat suatu $i \in \{0,1,2,3\}$, sedemikian hingga $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, maka perlu dilakukan uji parsial terhadap komponen $\boldsymbol{\beta}$ dengan menerapkan uji Z. Berikut adalah hasil uji parsial untuk $\beta_0, \cdots, \beta_3$.

Tabel 3.3 Uji Parsial Asimtotik Berdasarkan Model 3.7

No.	Hipotesis	Statistik Uji $\left(\frac{\beta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^T (\boldsymbol{X}_n^T \boldsymbol{X}_n)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}}\right)$	Keputusan (Tolak H_0 jika $\lvert Z_i \rvert > Z_{0{,}975} = 1{,}9600$)
1.	$H_0\colon \beta_0 = 0$ lawan $H_1\colon \beta_0 \neq 0$	$Z_0 = 24{,}2055$	Tolak H_0
2.	$H_0\colon \beta_1 = 0$ lawan $H_1\colon \beta_1 \neq 0$	$Z_1 = 3{,}9949$	Tolak H_0
3.	$H_0\colon \beta_2 = 0$ lawan $H_1\colon \beta_2 \neq 0$	$Z_2 = 3{,}0966$	Tolak H_0
4.	$H_0\colon \beta_3 = 0$ lawan $H_1\colon \beta_3 \neq 0$	$Z_3 = -2{,}7743$	Tolak H_0

Dapat dilihat bahwa uji parsial untuk β_0, β_1, β_2, dan β_3 menghasilkan keputusan menolak H_0, yang artinya semua prediktor pada Model (3.7) berpengaruh signifikan terhadap respon.

Kecukupan model juga dapat dilihat melalui selang kepercayaan parsial untuk setiap komponen $\boldsymbol{\beta}$. Dengan menerapkan Rumus (3.5), maka selang kepercayaan asimtotik 95% untuk β_0, β_1, β_2, dan β_3 berturut-

Bakti Cendekia
Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

turut adalah $(15{,}3922\ ,\ 18{,}1045)$, $(6{,}7970\ ,\ 19{,}8899)$, $(0{,}4764\ ,\ 2{,}1195)$, dan $(-11{,}2150\ ,\ -1{,}9292)$. Jelas bahwa tidak ada selang yang memuat angka nol. Sehingga melalui cara ini juga menunjukkan bahwa semua prediktor pada Model (3.7) berpengaruh signifikan terhadap respon.

Dengan demikian, berdasarkan uji hipotesis dan selang kepercayaan untuk $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, dan β_3, Model (3.7) adalah model yang cukup untuk menggambarkan hubungan antara luas lahan sawah dan jumlah tenaga kerja terhadap hasil panen. Model ini selanjutnya dapat digunakan sebagai model untuk memprediksi hasil panen padi berdasarkan luas lahan sawah dan jumlah tenaga kerja.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Uji hipotesis asimtotik parameter model regresi linear umum adalah uji tentang vektor $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p+1}$ berdasarkan hipotesis $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ lawan $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, dengan aturan keputusan tolak H_0 pada tingkat signifikansi α jika dan hanya jika
$$K_n := \frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n\right)}{\hat{\sigma}_n^2} > \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1).$$
Jika uji terhadap hipotesis $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ lawan $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ berakhir pada keputusan tolak H_0, maka akan dilakukan uji parsial untuk setiap komponen vektor $\boldsymbol{\beta}$ yang berdasarkan pada hipotesis $H_0 : \beta_i = 0$ lawan $H_1 : \beta_i \neq 0$, dengan aturan keputusan tolak H_0 pada tingkat signifikansi α jika dan hanya jika
$$Z_i := \frac{\widehat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^T \left(\boldsymbol{X}_n^T \boldsymbol{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ atau } Z_i := \frac{\widehat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^T \left(\boldsymbol{X}_n^T \boldsymbol{X}_n\right)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$
2. Daerah kepercayaan asimtotik $(1-\alpha)100\%$ untuk vektor $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut:
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\beta}) = \left\{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1} \left| \frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \leq \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(p+1) \right.\right\}.$$
Selanjutnya selang kepercayaan parsial $(1-\alpha)100\%$ secara asimtotik untuk komponen vektor $\boldsymbol{\beta}$ adalah:
$$\left(\hat{\beta}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^T (\boldsymbol{X}_n^T \boldsymbol{X}_n)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}, \quad \hat{\beta}_i - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 \boldsymbol{l}_{i+1}^T (\boldsymbol{X}_n^T \boldsymbol{X}_n)^{-1} \boldsymbol{l}_{i+1}}\right), \qquad i = 0,1,\ldots,p.$$
3. Pada penelitian ini, inferensi asimtotik parameter model regresi linear umum diterapkan pada data produksi padi di Desa Lipumasagena Kabupaten Konawe Selatan, yaitu untuk menentukan model yang cocok untuk memprediksi hasil panen padi berdasarkan luas lahan dan tenaga kerja. Berdasarkan analisis data yang dilakukan, diperoleh model estimasi sebagai berikut:
$$\hat{Y} = 16{,}7483 + 13{,}3434x_1^2 + 1{,}2980x_2^2 - 6{,}5721x_1x_2,$$
dimana x_1 adalah luas lahan (dalam satuan hektar), x_2 adalah jumlah tenaga kerja, dan $\hat{Y}$ adalah prediksi hasil panen (dalam satuan kuintal).

Pada penelitian ini penulis melakukan inferensi parameter model regresi linear umum menggunakan metode asimtotik, maka untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar menggunakan metode lain seperti metode nonparametrik.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada dosen pembimbing atas segala curahan perhatiannya sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga menyampaikan terimakasih kepada seluruh pihak yang telah berkontribusi pada penelitian ini baik secara langsung maupun tidak langsung.

Jurnal Nasional Hasil Penelitian Bidang Multidisiplin
Volume 1 Nomor 2, Hal. 114 - 132, Juli - Desember 2024
P-ISSN: xxxx - xxxx E-ISSN: 3047 - 6658
DOI: https://doi.org/10.30598/jnbcxxxxxxxxxxxxx

DAFTAR PUSTAKA

[1] L.J. Bain dan M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics* (Second Edition), Duxbury Thomson Learning, California, 1992.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (Second Edition), John Willey and Sons., New York, 1971.

[3] H.W. Greene, *Econometric Analysis* (Fifth Edition), Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[4] B. Illowsky dan S. Dean, *Intorductory Statistics*, Openstax, Houston, 2018.

[5] A. Izulkarnaen, *Pemodelan Regresi Variabel Moderasi Menggunakan Metode Interaksi (Studi Kasus Produksi Padi Di Desa Lipumasagena Kabupaten Konawe Selatan)*, Kendari. Halu Oleo, 2020.

[6] R.A. Johnson dan D.W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis: Sixth Edition*, Prentice Hall, New Delhi, 2007.

[7] A.M. Mathai dan H.J. Haubold, *Matrix Methods and Fractional Calculus*, World Scientific, London, 2018.

[8] Risma, S. Sahriman dan S.A. Thamrin, “Perbandingan Estimasi Metode Kuadrat Terkecil Terboboti dan Metode Transformasi Box-Cox Pada Data Heteroskedastisitas”, *Estimasi*: *Journal of Statistics and Its Application, vol.* 1, no. 2, pp. 83–93, 2020.

[9] A. Sayuti, D. Kusnandar dan M.N. Mara, “Generalized Cross Validation Dalam Regresi Smoothing Spline”, *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster),* vol. 2, no. 3, pp. 96-191, 2013.

[10] J. Shao, *Mathematical Statistics* (Second Edition), Springer, New York, 2003.

[11] W. Somayasa, *Statistika Matematika*, Deepublish Budi Utama, Yogyakarta, 2019.

[12] W. Somayasa, *Pengantar Teori Peluang Dan Statistika Matematika*, Deepublish Budi Utama, Yogyakarta, 2023.

[13] A.W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, New York, 1998.

[14] J.M. Wooldridge, *Introductory Econometrics : A Modern Approach*, Cengage Learning Boston, 2016.